

TRAVAUX DIRIGES DE MICROECONOMIE - L3

Second semestre 2010

Chargé de cours : Thibault Brodaty
Chargée de TD : Stéphanie Cassilde

Séances 1 à 3 – révisions - corrigé

**Exercices tirés de Médan, P. (2008). Microéconomie – TD. Paris : Dunod.
Corrigés inspirés de Médan (2008).**

Rappels :

Pour les séances de révision, nous vous demandons de traiter chaque exercice de manière approfondie, ce qui implique :

- de définir les concepts mobilisés par chaque exercice et pour chaque question ;
- de résoudre ou d'essayer de résoudre chaque exercice ;
- d'expliquer de manière détaillée votre réponse, autrement dit les mécanismes microéconomiques concernés ;
- si vous ne parvenez pas à résoudre l'exercice, d'identifier les éléments que vous ne comprenez pas et / ou qui vous manquent pour répondre.

Pour l'ensemble du corrigé, les définitions des mots figurent en fin de document

Première fiche de TD

Exercice 1 : Les courbes d'indifférences associées à la fonction d'utilité $U(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ sont-elles concaves ou convexes ?

Mots clef : courbe d'indifférence, fonction d'utilité, concave, convexe.

Nous utilisons ici une méthode basée sur le taux marginal de substitution (TMS). Rappelons les deux manières possibles de calculer le TMS :

- 1) Le TMS est égal au rapport des utilités marginales : $TMS = U_{mx} / U_{my}$
- 2) Le TMS est égal à « moins la pente de la courbe d'indifférence » : $TMS = - dy / dx$

Si la dérivée totale du TMS par rapport à x (c'est-à-dire $dTMS / dx$) est positive, autrement dit si le TMS est croissant dans x , la fonction d'utilité associée est concave. En revanche, si la dérivée totale du TMS par rapport à x est négative, autrement dit si le TMS est décroissant dans x , la fonction d'utilité associée est convexe.

Pour répondre à la question posée par l'exercice, (i) nous calculons le TMS, (ii) nous calculons $dTMS / dx$, et enfin (iii) nous statuons sur le signe du résultat obtenu.

$$\begin{aligned} \text{(i) } TMS &= U_{mx} / U_{my} = (\partial U(x,y) / \partial x) / (\partial U(x,y) / \partial y) \\ &= (2 \times 2x) / (2 \times 2y) = 4x / 4y \\ &= x / y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } dTMS / dx &= d[x / y] / dx = [(ydx - xdy) / y^2] / dx && \text{ nous prenons la dérivée de } (u / v) \\ &= [[dx (y - xdy / dx)] / y^2] / dx \\ &= [dx (y - xdy / dx)] / y^2 dx \\ &= (y - xdy / dx) / y^2 \\ &= (y - x \times (-TMS)) / y^2 && \text{ car } -TMS = dy / dx \\ &= (y + xTMS) / y^2 \end{aligned}$$

(iii) comme $y^2 > 0$, que $y > 0$, que $x > 0$ et que par convention $TMS > 0$, nous pouvons en conclure que $dTMS / dx > 0$. Autrement dit, la fonction d'utilité associée est concave.

Autre méthode pour répondre à la question posée : une courbe est convexe si sa dérivée première est négative et que dérivée seconde est positive. Nous devons alors calculer la dérivée première puis la dérivée seconde. Ici, les calculs sont plus rapides selon la méthode du TMS.

NB : un rappel sur la différence entre dérivée partielle (∂) et dérivée totale (d) est fait dans votre cours.

Exercice 2 : Claire consomme chaque jour des biens X et Y, dont les prix unitaires sont respectivement de 20 et 25 euros. Elle dispose d'un revenu quotidien de 250 euros qu'elle dépense entièrement. Vous disposez de plus des informations suivantes concernant l'utilité marginale de Claire :

Quantité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U_{mX}	120	100	90	85	80	75	70	65	60	55	40	20
U_{mY}	160	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50	40

- 1) Indiquer la contrainte budgétaire de Claire.
- 2) Écrire la condition d'équilibre et la justifier.
- 3) En déduire les quantités optimales.
- 4) En supposant que le bien Y représente l'épargne de Claire, cela affecte-t-il ses choix antérieurs ?

Mots clef : utilité marginale, contrainte budgétaire, condition d'équilibre, quantités optimales.

1) La contrainte budgétaire est toujours de la forme : $R = px + qy$
avec R le revenu, p le prix du bien X, x la quantité de bien X, q le prix du bien Y et y la

quantité de bien Y.

D'après l'énoncé, il est possible d'écrire que la contrainte budgétaire quotidienne de Claire est : $250 = 20x + 25y$

2) La condition d'équilibre est : $U_{mx} / U_{my} = p / q$

Elle peut aussi être écrite de la manière suivante : $U_{mx} / p = U_{my} / q$

Nous pouvons la justifier ainsi : le consommateur est indifférent entre « consommer du bien X » et « consommer du bien Y » lorsque l'utilité marginale apportée par Y rapportée à son prix est égale à celle apportée par X rapportée à son prix. Lorsque la condition d'équilibre n'est pas satisfaite, le consommateur a toujours intérêt à acheter plus de X ou plus de Y :

- si $U_{mx} / p > U_{my} / q$, alors le consommateur préférera acquérir une unité supplémentaire de X ;
- si $U_{mx} / p < U_{my} / q$, alors le consommateur préférera acquérir une unité supplémentaire de Y.

3) Nous identifions deux méthodes pour déduire de la condition d'équilibre quelles sont les quantités optimales de Claire;

Méthode 1 :

Utilisation de la formulation suivante de la condition d'équilibre : $U_{mx} / U_{my} = p / q$

Or nous connaissons p et q, d'où : $p / q = 20 / 25 = 4 / 5 = 0,8$

Il suffit alors de repérer dans le tableau donné dans l'énoncé le rapport U_{mx} / U_{my} qui est égal à 0,8.

Pour 11 unités de X et 11 unités de Y, $U_{mx} / U_{my} = 0,8$.

Mais $11 \times 20 + 11 \times 25 = 220 + 275 = 495 > 250$. Même si la condition d'équilibre est respectée, elle ne correspond pas à la contrainte budgétaire de Claire. La réponse « 11 unités de X et 11 unités de Y » est donc *fausse*.

erreur 1 à ne pas commettre : oublier que le revenu quotidien de Claire est de 250 €

Il vaut mieux procéder par tâtonnement, en commençant par de petites quantités de X et de Y afin de pouvoir respecter le revenu quotidien. Il est alors possible d'identifier, pour 5 unités de X et 6 unités de Y que $U_{mx} / U_{my} = 0,8$ et que $5 \times 20 + 6 \times 25 = 250$.

Les quantités optimales de Claire sont : $(x^*, y^*) = (5, 6)$

Méthode 2 :

Utilisation de la formulation suivante de la condition d'équilibre : $U_{mx} / p = U_{my} / q$

Nous procédons par achat successif :

1er achat : Y

$$U_{mx1} / p = 120 / 20 = 6 \quad \text{et} \quad U_{my1} / q = 160 / 25 = 6,4$$

Comme $U_{mx1} / p < U_{my1} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé : $q = 25$ €

Il lui reste donc : $R - q = 250 - 25 = 225$ € à dépenser.

2ème achat : X

$$U_{mx1} / p = 120 / 20 = 6 \quad \text{et} \quad U_{my2} / q = 140 / 25 = 5,6$$

Comme $U_{mx1} / p > U_{my2} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de X.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $1 \times q + 1 \times p = 25 + 20 = 45 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - q - p = 250 - 25 - 20 = 205 \text{ €}$ à dépenser.

3ème achat : Y

$$U_{mx2} / p = 100 / 20 = 5 \quad \text{et} \quad U_{my2} / q = 140 / 25 = 5,6$$

Comme $U_{mx2} / p < U_{my2} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $2 \times q + 1 \times p = 2 \times 25 + 20 = 70 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 2 \times q - p = 250 - 2 \times 25 - 20 = 180 \text{ €}$ à dépenser.

4ème achat : Y

$$U_{mx2} / p = 100 / 20 = 5 \quad \text{et} \quad U_{my3} / q = 130 / 25 = 5,2$$

Comme $U_{mx2} / p < U_{my3} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $3 \times q + 1 \times p = 3 \times 25 + 20 = 95 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 3 \times q - p = 250 - 3 \times 25 - 20 = 155 \text{ €}$ à dépenser.

5ème achat : X

$$U_{mx2} / p = 100 / 20 = 5 \quad \text{et} \quad U_{my4} / q = 120 / 25 = 4,8$$

Comme $U_{mx2} / p > U_{my4} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de X.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $3 \times q + 2 \times p = 3 \times 25 + 2 \times 20 = 115 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 3 \times q - 2 \times p = 250 - 3 \times 25 - 2 \times 20 = 135 \text{ €}$ à dépenser.

6ème achat : Y

$$U_{mx3} / p = 90 / 20 = 4,5 \quad \text{et} \quad U_{my4} / q = 120 / 25 = 4,8$$

Comme $U_{mx3} / p < U_{my4} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $4 \times q + 2 \times p = 4 \times 25 + 2 \times 20 = 140 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 4 \times q - 2 \times p = 250 - 4 \times 25 - 2 \times 20 = 110 \text{ €}$ à dépenser.

7ème achat : X

$$U_{mx3} / p = 90 / 20 = 4,5 \quad \text{et} \quad U_{my5} / q = 110 / 25 = 4,4$$

Comme $U_{mx3} / p > U_{my5} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de X.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $4 \times q + 3 \times p = 4 \times 25 + 3 \times 20 = 160 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 4 \times q - 3 \times p = 250 - 4 \times 25 - 3 \times 20 = 90 \text{ €}$ à dépenser.

8ème achat : Y

$$U_{mx4} / p = 85 / 20 = 4,25 \quad \text{et} \quad U_{my5} / q = 110 / 25 = 4,4$$

Comme $U_{mx4} / p < U_{my5} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $5 \times q + 3 \times p = 5 \times 25 + 3 \times 20 = 185 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 5 \times q - 3 \times p = 250 - 5 \times 25 - 3 \times 20 = 65 \text{ €}$ à dépenser.

9ème achat : X

$$U_{mx4} / p = 85 / 20 = 4,25 \quad \text{et} \quad U_{my6} / q = 100 / 25 = 4$$

Comme $U_{mx4} / p > U_{my6} / q$, il est préférable d'acquérir une unité de X.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $5 \times q + 4 \times p = 5 \times 25 + 4 \times 20 = 205 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 5 \times q - 4 \times p = 250 - 5 \times 25 - 4 \times 20 = 45 \text{ €}$ à dépenser.

10ème achat : X et Y

$$U_{mx5} / p = 80 / 20 = 4 \quad \text{et} \quad U_{my6} / q = 100 / 25 = 4$$

Comme $U_{mx5} / p = U_{my6} / q$, nous sommes à la condition d'équilibre. Claire achète à la fois une unité de X et une de Y.

A l'issue de cet achat, Claire a dépensé, au total : $6 \times q + 5 \times p = 6 \times 25 + 5 \times 20 = 250 \text{ €}$

Il lui reste donc : $R - 6 \times q - 5 \times p = 250 - 6 \times 25 - 5 \times 20 = 0 \text{ €}$ à dépenser.

Les quantités optimales de Claire sont : $(x^*, y^*) = (5, 6)$

erreur 2 à ne pas commettre : oublier la question précédente, et notamment la signification de la condition d'équilibre. En effet, il faut impérativement comparer les bons rapports U_{mx} / p et U_{my} / q , autrement dit bien choisir U_{mx} et U_{my} en fonction du nombre de X ou de Y déjà consommé par Claire.

NB : pour réussir cet exercice, il faut bien entendu avoir compris comment lire le tableau donné dans l'énoncé.

4) En supposant que le bien Y représente l'épargne de Claire, cela n'affecte pas ses choix antérieurs. En effet, sa fonction d'utilité est identique est les utilités marginales aussi. Il n'y a aucune raison pour que les quantités optimales soient différentes.

Une autre manière de le dire est que les caractéristiques particulières de l'épargne (qui peut être un revenu futur notamment) sont déjà prises en compte dans les préférences de Claire et donc dans les utilités marginales. Alors les arbitrages de Claire mènent au même panier optimal.

Exercice 3 : Représenter sur un graphique la carte d'indifférence de deux biens A et B lorsque le prix du bien B augmente, dans les deux cas suivants :

- 1) les biens A et B sont fortement substituables et sont normaux ;
- 2) les biens A et B sont fortement substituables et le bien B est un bien inférieur.

On placera les quantités de biens B en ordonnée. On mettra en évidence par la méthode de Hicks, l'effet de substitution, l'effet de revenu et l'effet total.

Mots clef : carte d'indifférence, biens substituables, bien normal, bien inférieur, méthode de Hicks, effet de substitution, effet de revenu, effet total.

Le fait que les biens soient fortement substituables affectent la forme des courbes d'indifférence. Il faut que le graphique permettent de voir que pour une unité en moins de B le consommateur gagne beaucoup plus qu'une unité de A en plus.

1) Le fait que les biens soient normaux nous permet de prédire le sens de l'effet revenu. D'après la définition d'un bien normal, dont l'élasticité revenu est comprise entre 0 et 1, plus le revenu est élevé plus l'on consomme du bien normal dans une proportion « normale ». Inversement, si le revenu baisse, on consomme moins d'un bien normal. Dans cet exercice, la hausse du prix du bien B implique une baisse du pouvoir d'achat, autrement dit une baisse du revenu réel. Nous devons donc représenter sur le graphique des effets revenu négatifs pour le bien B et pour le bien A.

Concernant l'effet substitution, la hausse du prix du bien B implique que son prix relatif augmente par rapport à celui du bien A. On consomme donc moins de bien B. Cela implique, par substitution, une hausse des quantités consommées du bien A. Et, étant donné la forte substituabilité, cette quantité supplémentaire du bien A sera bien supérieure à celle perdue du bien B.

Sur le premier graphique, nous devons donc représenter *in fine* :

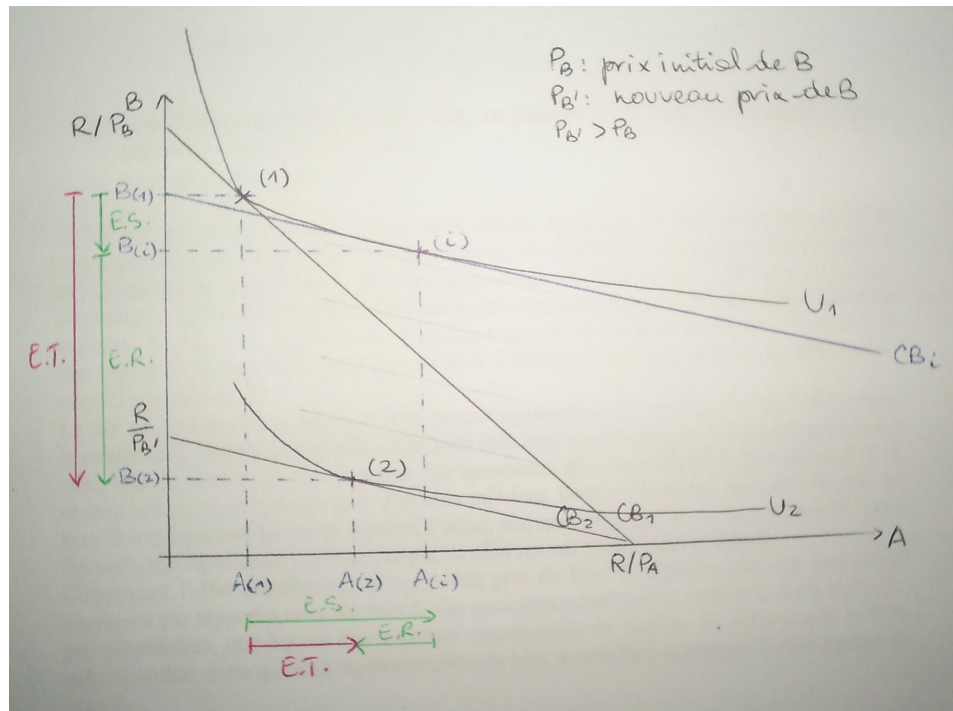
- un effet revenu négatif pour le bien A ;
- un effet revenu négatif pour le bien B ;

- un effet substitution positif pour le bien A ;
- un effet substitution négatif pour le bien B.

Nous pouvons en déduire que l'effet total concernant le bien B sera négatif. Concernant le bien A, nous ne pouvons pas prédire lequel des effets (revenu ou substitution) l'emportera.

Enfin, comme nous devons utiliser la méthode de Hicks, pour tracer le graphique nous devons tracer la nouvelle contrainte budgétaire, puis sa parallèle lorsqu'elle est tangente à l'ancienne courbe d'indifférence.

Voici le graphique obtenu :



Étapes de construction :

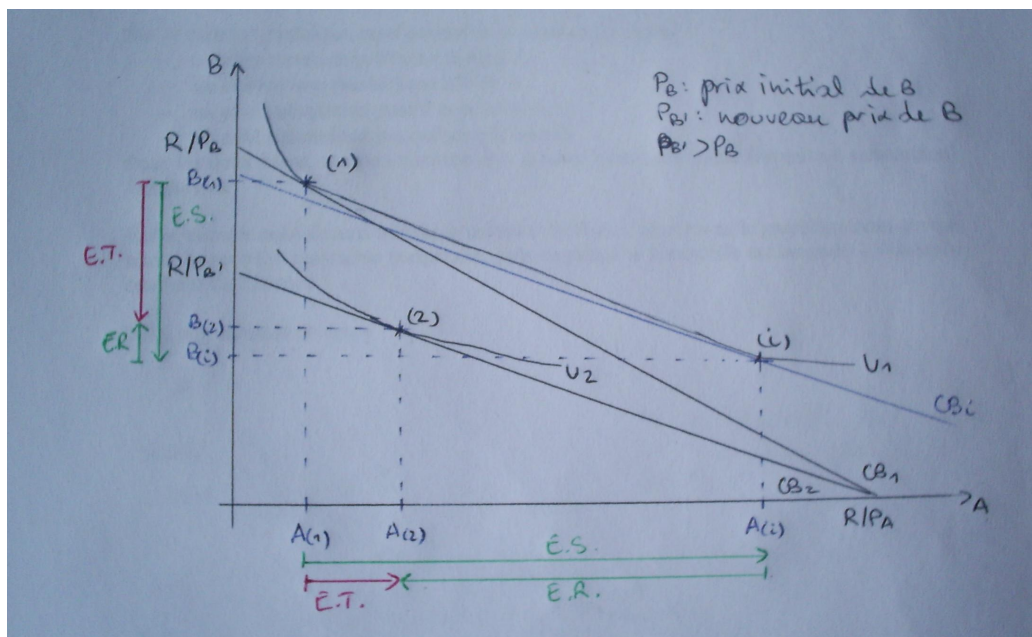
- tracer les axes en plaçant le bien B en ordonnée ;
- tracer la courbe d'indifférence initiale (où les biens A et B sont fortement substituables) et tracer la contrainte budgétaire initiale. Le panier optimal initial est (1) ;
- tracer la nouvelle contrainte budgétaire, où l'on tient compte de la hausse du prix du bien B. Tracer également une nouvelle courbe d'indifférence. Le nouveau panier optimal est (2) ;
- application de la méthode de Hicks : tracer une troisième contrainte budgétaire, parallèle à la nouvelle contrainte budgétaire et tangente à la courbe d'indifférence initiale. Le panier intermédiaire optimal (i) permet de séparer l'effet substitution de l'effet revenu ;
- identification de l'effet substitution : E.S. en passant de (1) à (i). On se déplace sur une même courbe d'indifférence, où l'on substitue une quantité de B par une quantité de A ;
- identification de l'effet revenu : E.R. en passant de (i) à (2). On se déplace d'une contrainte budgétaire à une autre ;

- conclusion concernant l'effet total.

2) Le fait que le bien A soit normal nous permet de prédire le sens de l'effet revenu le concernant. D'après la définition d'un bien normal, dont l'élasticité revenu est comprise entre 0 et 1, plus le revenu est élevé plus l'on consomme du bien normal dans une proportion « normale ». Inversement, si le revenu baisse, on consomme moins d'un bien normal. Dans cet exercice, la hausse du prix du bien B implique une baisse du pouvoir d'achat, autrement dit une baisse du revenu réel. Nous devons donc représenter sur le graphique un effet revenu négatif pour le bien A.

Le fait que le bien B soit inférieur nous permet également de prédire le sens de l'effet revenu le concernant. D'après la définition d'un bien inférieur, dont l'élasticité revenu est inférieure à zéro, plus le revenu est élevé, moins l'on consomme d'un bien inférieur. Inversement, si le revenu baisse, on consomme plus d'un bien inférieur. Dans cet exercice, la hausse du prix du bien B implique une baisse du pouvoir d'achat, autrement dit une baisse du revenu réel. Nous devons donc représenter sur le graphique un effet revenu positif pour le bien B.

Concernant l'effet substitution, la hausse du prix du bien B implique que son prix relatif augmente par rapport à celui du bien A. On consomme donc moins de bien B. Cela implique, par substitution, une hausse des quantités consommées du bien A. Et, étant donné la forte substituabilité, cette quantité supplémentaire du bien A sera bien supérieure à celle perdue du bien B.



Sur le second graphique, nous devons donc représenter *in fine* :

- un effet revenu négatif pour le bien A ;
- un effet revenu positif pour le bien B ;
- un effet substitution positif pour le bien A ;
- un effet substitution négatif pour le bien B.

Pour les deux biens, nous ne pouvons pas prédire lequel des effets (revenu ou substitution) l'emportera.

Enfin, comme nous devons utiliser la méthode de Hicks, pour tracer le graphique nous devons

tracer la nouvelle contrainte budgétaire, puis sa parallèle lorsqu'elle est tangente à l'ancienne courbe d'indifférence.

Étapes de construction :

- tracer les axes en plaçant le bien B en ordonnée ;
- tracer la courbe d'indifférence initiale (où les biens A et B sont fortement substituables) et tracer la contrainte budgétaire initiale. Le panier optimal initial est (1) ;
- tracer la nouvelle contrainte budgétaire, où l'on tient compte de la hausse du prix du bien B. Tracer également une nouvelle courbe d'indifférence. Le nouveau panier optimal est (2) ;
- application de la méthode de Hicks : tracer une troisième contrainte budgétaire, parallèle à la nouvelle contrainte budgétaire et tangente à la courbe d'indifférence initiale. Le panier intermédiaire optimal permet de séparer l'effet substitution de l'effet revenu ;
- identification de l'effet substitution : **E.S.** en passant de (1) à (i). On se déplace sur une même courbe d'indifférence, où l'on substitue une quantité de B par une quantité de A ;
- identification de l'effet revenu : **E.R.** en passant de (i) à (2). On se déplace d'une contrainte budgétaire à une autre ;
- conclusion concernant l'effet total.

NB : il s'agit ici plus d'une question de cours que d'un exercice. Vous devez savoir ce que vous devez représenter avant de commencer à tracer le graphique.

Exercice 4 : Évaluer (par un signe + ou -) l'effet d'une hausse du prix du bien X sur la quantité demandées des biens X et Y dans les cas suivants :

Mots clef : bien normal, bien inférieur, bien de luxe, bien de Giffen, effet de substitution, effet de revenu, effet total.

Bien - Catégorie	Effet de substitution	Effet de revenu	Effet total
X – normal	-	-	-
X – inférieur	-	+	?
X – de luxe	-	-	-
X – de Giffen	-	+	+
Y – normal	+	-	?
Y – inférieur	+	+	+

Justifications concernant l'effet substitution :

La hausse du prix du bien X implique que son prix relatif augmente par rapport à celui du bien Y. On consomme donc moins de bien X, quelle que soit sa catégorie. Cela implique, par substitution, une hausse des quantités consommées du bien Y, quelle que soit sa catégorie.

Justifications concernant l'effet revenu :

La hausse du prix du bien X implique une baisse du pouvoir d'achat, autrement dit une baisse

du revenu réel. On consomme donc moins d'un bien normal, plus d'un bien inférieur, moins d'un bien de luxe et beaucoup plus d'un bien Giffen. Cela est directement lié à la définition en termes d'élasticité revenu pour chacune de ces catégories de bien.

Justifications concernant l'effet total :

Lorsque l'effet substitution et l'effet revenu vont dans le même sens, le signe de l'effet total est évident. Lorsque l'effet substitution et l'effet revenu ne vont pas dans le même sens, il n'est pas possible de conclure (signe « ? ») sauf dans le cas du bien Giffen, dont les variations sont plus que proportionnelles dans le cadre de l'effet revenu. On sait donc que l'effet revenu l'emportera sur l'effet substitution pour ce bien.

NB : il ne s'agit pas d'une question de cours car il faut remplir le tableau en fonction de l'effet d'une hausse du prix du bien X. En revanche, sans connaître les définitions des différentes catégories, il n'est pas possible de savoir comment évoluent les différents effets.

Exercice 5 : L'entreprise Ducharme produit le bien C-2000 tel que : (i) les quantités vendues sont égales à 1050 lorsque le prix est égal à 10 euros et (ii) chaque fois que le prix augmente de 1 euro, les quantités baissent de 15 unités.

- 1) Déterminer puis représenter la fonction de demande.
- 2) Calculer la valeur de l'élasticité-prix directe aux points R et T où les prix sont respectivement de 20 et 60 euros. Puis déterminer les coordonnées du point S telles que l'élasticité-prix directe en S soit égale à -1 . En déduire la valeur de la recette totale maximale.
- 3) A l'aide de la question précédente, étudier l'influence d'une baisse de prix sur la recette totale. En déduire l'utilité de la connaissance des élasticités-prix pour le producteur.
- 4) Déterminer une relation liant l'élasticité-prix et la variation de la recette totale.

Mots clef : fonction de demande, élasticité-prix directe, recette totale.

1) Notons la fonction de demande : $D(p)$

Nous pouvons aussi poser $q = D(p)$ car la fonction de demande est bien la fixation des quantités demandées en fonction de l'évolution de son prix.

Pour déterminer la fonction de demande, nous nous basons sur l'énoncé.

Détermination de la pente de la fonction de demande : l'énoncé nous dit « chaque fois que le prix augmente de 1 euro, les quantités baissent de 15 unités ». La pente est donc : -15

Détermination de l'ordonnée à l'origine de la fonction de demande : l'énoncé nous dit « les quantités vendues sont égales à 1050 lorsque le prix est égal à 10 euros ». Or l'ordonnée à l'origine correspond aux quantités demandées lorsque le prix est nul.

D'après la détermination de la pente, nous savons comment le consommateur réagit face à une hausse de prix. Nous pouvons en déduire la manière dont il réagit face à une baisse de prix : si le prix baisse de 1 euro, les quantités augmentent de 15 unités. Lorsque le prix passe de 10 euros à 0 euros, les quantités augmentent donc de 150 unités. Comme les quantités initiales pour un prix de 10 euros sont 1050, nous pouvons déduire l'ordonnée à l'origine :

$$1050 + 150 = 1200$$

La fonction de demande est donc : $q = D(p) = 1200 - 15p$

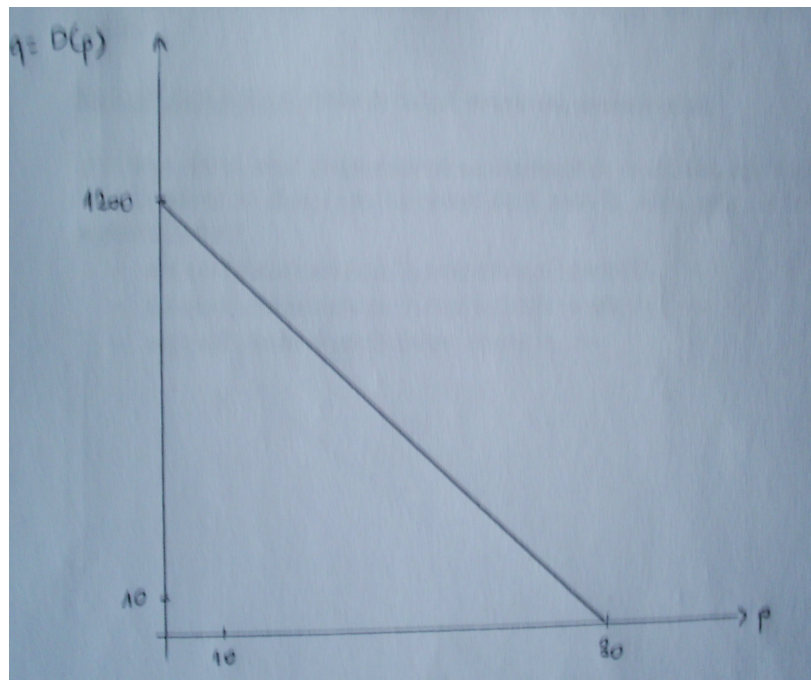
Pour représenter cette fonction de demande, nous plaçons l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire le point (0, 1200) puis l'abscisse à l'origine, c'est-à-dire le point où $q = 0$. Alors :

$$q = 0 = 1200 - 15p$$

$$15p = 1200$$

$$p = 1200 / 15 = 80$$

Nous plaçons donc le point (80, 0), l'abscisse à l'origine. En reliant l'ordonnée à l'origine à l'abscisse à l'origine nous obtenons le tracé de la fonction de demande.



2) Rappelons la formule générale de l'élasticité-prix directe :

$$e_{q/p} = (\partial q / \partial p) / (q / p) = (\partial q / \partial p) \times (p / q)$$

En l'appliquant à la fonction de demande déterminée dans la question précédente :

$$\begin{aligned} e_{q/p} &= (\partial q / \partial p) \times (p / q) = (\partial [1200 - 15p] / \partial p) \times (p / q) \\ &= -15 \times (p / q) \end{aligned}$$

Valeur de l'élasticité-prix directe au point R :

Pour appliquer la formule de l'élasticité-prix directe trouvée précédemment, nous avons besoin de connaître p et q .

L'énoncé nous donne $p = 20$

Nous pouvons calculer q pour cette valeur de p : $q = 1200 - 15p = 1200 - 15 \times 20 = 1200 - 300 = 900$

Alors : $e_{q/p} = -15 \times (p / q) = -15 \times (20 / 900) = -1 / 3$

Valeur de l'élasticité-prix directe au point T :

Pour appliquer la formule de l'élasticité-prix directe trouvée précédemment, nous avons besoin de connaître p et q .

L'énoncé nous donne $p = 60$

Nous pouvons calculer q pour cette valeur de p : $q = 1200 - 15p = 1200 - 15 \times 60 = 1200 - 900 = 300$

Alors : $e_{q/p} = -15 \times (p / q) = -15 \times (60 / 300) = -3$

Coordonnées du point S :

L'énoncé nous donne $e_{q/p} = -1$

Étant donné la formule de l'élasticité-prix directe, nous pouvons calculer p :

$$e_{q/p} = -1 = -15 \times (p / q)$$

$$1 = 15 \times (p / q)$$

$$q = 15p$$

$$1200 - 15p = 15p \quad \text{du fait de la détermination de la fonction de demande}$$

$$1200 = 30p$$

$$1200 / 30 = p = 40$$

Nous pouvons calculer q pour cette valeur de p : $q = 1200 - 15p = 1200 - 15 \times 40 = 1200 - 600 = 600$

En déduire la valeur de la recette totale maximale :

(i) Vous savez que c'est lorsque $e_{q/p} = -1$ que la recette totale est maximale et alors, en argumentant bien, vous pouvez conclure de suite. Vous déduisez de la valeur de l'élasticité-prix directe quel est le point où la recette totale est maximale, puis vous la calculez :

$$RT(p, q) = p \times q = 40 \times 600 = 24\,000 \text{ €}$$

La recette totale maximale est de 24 000 €.

(ii) La recette totale dépend du prix et des quantités et peut être écrite telle que :

$$RT(p, q) = p \times q = p \times (1200 - 15p) = 1200p - 15p^2$$

Pour savoir en quel point elle peut être maximale, nous en calculons la dérivée première :

$$\partial RT(p, q) / \partial p = \partial (1200p - 15p^2) / \partial p = 1200 - 2 \times 15p = 1200 - 30p$$

$$\text{Si : } 1200 - 30p = 0, \text{ cela implique : } 1200 = 30p \text{ et donc } 1200 / 30 = p = 40$$

Lorsque $p = 40$, $q = 600$ (cf. les coordonnées du point S calculées *supra*).

La recette totale maximale est donc :

$$RT(p, q) = p \times q = 40 \times 600 = 24\,000 \text{ €}$$

Pour être sûr qu'il s'agit bien du maximum, nous calculons la dérivée seconde :

$$\partial^2 RT(p, q) / \partial p^2 = \partial (1200 - 30p) / \partial p = -30 < 0$$

Cette quantité est négative, donc nous sommes bien face à la recette totale.

(iii) Si vous avez tout oublié, pas de panique, vous pouvez raisonner par tâtonnement. Cela ne vous garantira pas du tout le maximum de points au barème, mais vous n'aurez pas zéro.

En R la recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 20 \times 900 = 18\,000 \text{ €}$

En T la recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 60 \times 300 = 18\,000 \text{ €}$

En S la recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 40 \times 600 = 24\,000 \text{ €}$

Nous pouvons également calculer les recettes totales aux points suivants :

Lorsque $p = 30$: alors $q = 1200 - 15p = 1200 - 15 \times 30 = 1200 - 450 = 750$, ce qui implique une recette totale de : $RT(p, q) = p \times q = 30 \times 750 = 22\,500 \text{ €}$

Lorsque $p = 50$: alors $q = 1200 - 15p = 1200 - 15 \times 50 = 1200 - 750 = 450$, ce qui implique une recette totale de : $RT(p, q) = p \times q = 50 \times 450 = 22\,500 \text{ €}$

On se rend compte que plus le prix se rapproche de $p = 40$, que ce soit par le haut (de R vers S) ou par le bas (de T vers S), plus la recette totale est élevée. Par tâtonnement, nous pouvons donc affirmer que la recette totale est atteinte au point S. Alors :

$$RT(p, q) = p \times q = 40 \times 600 = 24\,000 \text{ €}$$

3) L'énoncé ne fixe pas l'ampleur de la baisse de prix. Comme nous devons nous baser sur les

résultats de la question précédente, nous fixons nous-même cette valeur. Dans ce corrigé, nous étudions l'influence d'une baisse de prix de 1 %.

Influence d'une baisse de prix de 1 % au point R :

Le prix associé au point R' est : $p' = p (1 - 1 / 100) = 20 (1 - 1 / 100) = 19,80 \text{ €}$

A l'aide de la question précédente, nous pouvons calculer quelle est la quantité associée à ce nouveau prix : nous utilisons donc l'élasticité-prix directe calculée précédemment. Alors :

$$q' = 900 (1 + 1 / 300) = 903$$

La nouvelle recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 19,8 \times 903 = 17\,879 \text{ €}$

Une baisse de prix au point R implique donc une chute de la recette totale en ce point.

Influence d'une baisse de prix de 1 % au point T :

Le prix associé au point T' est : $p' = p (1 - 1 / 100) = 60 (1 - 1 / 100) = 59,40 \text{ €}$

A l'aide de la question précédente, nous pouvons calculer quelle est la quantité associée à ce nouveau prix : nous utilisons donc l'élasticité-prix directe calculée précédemment. Alors :

$$q' = 300 (1 + 3 / 100) = 309$$

La nouvelle recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 59,4 \times 309 = 18\,355 \text{ €}$

Une baisse de prix au point T implique donc une hausse de la recette totale en ce point.

Influence d'une baisse de prix de 1 % au point S :

Le prix associé au point S' est : $p' = p (1 - 1 / 100) = 40 (1 - 1 / 100) = 39,60 \text{ €}$

A l'aide de la question précédente, nous pouvons calculer quelle est la quantité associée à ce nouveau prix : nous utilisons donc l'élasticité-prix directe calculée précédemment. Alors :

$$q' = 600 (1 + 1 / 100) = 606$$

La nouvelle recette totale est : $RT(p, q) = p \times q = 39,6 \times 606 = 23\,998 \text{ €}$

Une baisse de prix au point S implique donc une stabilité de la recette totale en ce point.

Il est donc très utile au producteur de connaître la valeur des élasticité-prix directe car cela lui permet de savoir comment il doit faire varier son prix afin d'atteindre la recette totale maximale.

NB1 : les conclusions finales sont les mêmes quelle que soit l'ampleur de la baisse du prix.

NB2 : en nous basant sur la fonction de demande, nous pouvons également trouver les quantités q' . Sachez qu'en contrôle ou en examen nous pouvons vous imposer l'une ou l'autre méthode.

4)

	lorsque le prix baisse	lorsque le prix augmente
$0 > e_{q/p} > -1$	la recette totale baisse	la recette totale augmente
$ e_{q/p} > 1$	la recette totale augmente	la recette totale baisse
$e_{q/p} = -1$	la recette totale est stable	

Exercice 6 : Soit la fonction d'utilité de Pierre : $U(x, y) = x \cdot y$

où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y .

- 1) L'État oblige Pierre à payer un impôt sur le revenu au taux moyen de 25 %. Évaluer l'impact de cette mesure sur les quantités consommées.

- 2) De plus, Pierre paye la TVA au taux de 19,60 %. Évaluer l'impact de ce nouvel impôt. Conclure.
- 3) Montrer que, si on donne le choix à Pierre, il préférera toujours payer une TVA de t % sur les biens plutôt qu'un impôt sur le revenu de t %.

Mots clef : fonction d'utilité, impôt sur le revenu, taux moyen, impact, TVA.

1) Pour évaluer l'impact d'un impôt sur le revenu d'un taux moyen de 25 % sur les quantités consommées par Pierre, il nous faut connaître les quantités optimales avant la mise en place de l'impôt.

$$\begin{aligned} &\text{Max } U(x, y) \\ &\{x, y\} \\ &\text{s.c. } R = px + qy \end{aligned}$$

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda [R - px - qy]$$

les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{array}{lll} (1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0 & (1) y - \lambda p = 0 & (1) y / p = \lambda \\ (2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 & \text{i.e. } (2) x - \lambda q = 0 & \text{i.e. } (2) x / q = \lambda \\ (3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0 & (3) R - px - qy = 0 & (3) R - px - qy = 0 \end{array}$$

En égalisant (1) et (2) :

$$\begin{aligned} y / p &= x / q \\ y &= px / q \quad (4) \end{aligned}$$

En insérant (4) dans (3) :

$$\begin{aligned} R - px - q(px / q) &= 0 \\ R - px - px &= 0 \\ R - 2px &= 0 \\ R &= 2px \\ R / 2p &= x^* \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } y^* = px^* / q = p(R / 2p) / q = R / 2q$$

Lorsqu'il y a un impôt sur le revenu, la contrainte budgétaire devient :

$$R(1 - 0,25) = px + qy = 0,75R$$

Alors le Lagrangien s'écrit : $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda [0,75R - px - qy]$

les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{array}{lll} (1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0 & (1) y - \lambda p = 0 & (1) y / p = \lambda \\ (2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 & \text{i.e. } (2) x - \lambda q = 0 & \text{i.e. } (2) x / q = \lambda \\ (3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0 & (3) 0,75R - px - qy = 0 & (3) 0,75R - px - qy = 0 \end{array}$$

En égalisant (1) et (2) :

$$\begin{aligned} y / p &= x / q \\ y &= px / q \quad (4) \end{aligned}$$

En insérant (4) dans (3) :

$$0,75R - px - q(px / q) = 0$$

$$0,75R - px - px = 0$$

$$0,75R - 2px = 0$$

$$0,75R = 2px$$

$$0,75R / 2p = x^*$$

$$\text{Alors : } y^* = px^* / q = p(0,75R / 2p) / q = 0,75R / 2q$$

La consommation de Pierre a été réduite de 25 %.

2) Lorsque Pierre paye une TVA de 19,60 %, la contrainte budgétaire devient :

$$0,75R = p(1 + 0,196) x + q(1 + 0,196) y$$

Alors le Lagrangien s'écrit : $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda [0,75R - 1,196px - 1,196qy]$

les conditions de premier ordre sont :

$$(1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0 \quad (1) y - \lambda p = 0$$

$$(2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 \quad \text{i.e.} \quad (2) x - \lambda q = 0$$

$$(3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0 \quad (3) 0,75R - 1,196px - 1,196qy = 0$$

$$\text{i.e.} \quad (1) y / p = \lambda$$

$$(2) x / q = \lambda$$

$$(3) 0,75R - 1,196px - 1,196qy = 0$$

En égalisant (1) et (2) :

$$y / p = x / q$$

$$y = px / q \quad (4)$$

En insérant (4) dans (3) :

$$0,75R - 1,196px - 1,196q(px / q) = 0$$

$$0,75R - 1,196px - 1,196px = 0$$

$$0,75R - 2,392px = 0$$

$$0,75R = 2,392px$$

$$0,75R / 2,392p = x^* = 0,313 (R / p) = 0,627 (R / 2p)$$

$$\text{Alors : } y^* = px^* / q = p(0,75R / 2,392p) / q = 0,75R / 2,392q = 0,313 (R / q) = 0,627 (R / 2q)$$

La consommation de Pierre a été réduite de 37,3 % ($1 - 0,627 = 0,373$).

3) Quantités optimales lorsqu'il y a uniquement une TVA de t % :

$$\text{Max } U(x, y)$$

$$\{x, y\}$$

$$\text{s.c. } R = (1 + t)px + (1 + t)qy$$

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda [R - (1 + t)px - (1 + t)qy]$$

les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{array}{ll}
(1) \partial L(x,y,\lambda) / \partial x = 0 & (1) y - \lambda p = 0 \\
(2) \partial L(x,y,\lambda) / \partial y = 0 & \text{i.e.} \quad (2) x - \lambda q = 0 \\
(3) \partial L(x,y,\lambda) / \partial \lambda = 0 & (3) R - (1+t)px - (1+t)qy = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
& (1) y / p = \lambda \\
\text{i.e.} & (2) x / q = \lambda \\
& (3) R - (1+t)px - (1+t)qy = 0
\end{array}$$

En égalisant (1) et (2) :

$$\begin{array}{l}
y / p = x / q \\
y = px / q \quad (4)
\end{array}$$

En insérant (4) dans (3) :

$$\begin{array}{l}
R - (1+t)px - (1+t)q(px / q) = 0 \\
R - (1+t)px - (1+t)px = 0 \\
R - 2(1+t)px = 0 \\
R = 2(1+t)px \\
R / 2(1+t)p = x^*
\end{array}$$

$$\text{Alors : } y^* = px^* / q = p(R / 2(1+t)p) / q = R / 2(1+t)q$$

Quantités optimales lorsqu'il y a uniquement impôt sur le revenu de t % :

$$\begin{array}{l}
\text{Max } U(x,y) \\
\{x,y\} \\
\text{s.c. } (1-t)R = px + qy
\end{array}$$

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda [(1-t)R - px - qy]$$

les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{array}{ll}
(1) \partial L(x,y,\lambda) / \partial x = 0 & (1) y - \lambda p = 0 \\
(2) \partial L(x,y,\lambda) / \partial y = 0 & \text{i.e.} \quad (2) x - \lambda q = 0 \\
(3) \partial L(x,y,\lambda) / \partial \lambda = 0 & (3) (1-t)R - px - qy = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
& (1) y / p = \lambda \\
\text{i.e.} & (2) x / q = \lambda \\
& (3) (1-t)R - px - qy = 0
\end{array}$$

En égalisant (1) et (2) :

$$\begin{array}{l}
y / p = x / q \\
y = px / q \quad (4)
\end{array}$$

En insérant (4) dans (3) :

$$\begin{array}{l}
(1-t)R - px - q(px / q) = 0 \\
(1-t)R - px - px = 0 \\
(1-t)R - 2px = 0 \\
(1-t)R = 2px \\
(1-t)R / 2p = x^*
\end{array}$$

Alors : $y^* = px^* / q = p((1 - t)R / 2p) / q = (1 - t)R / 2q$

Or : $(1 - t)R / 2p < R / 2(1 + t)p$
 $[(1 - t)R / 2p] \times 2p < [R / 2(1 + t)p] \times 2p$
 $(1 - t)R < R / (1 + t)$
 $(1 - t)R / R < R / (1 + t)R$
 $(1 - t) < 1 / (1 + t)$
 $(1 - t) \times (1 - t) < 1 \times (1 - t) / (1 + t)$
 $(1 - t)^2 < 1$

Donc les quantités optimales avec un impôt sur le revenu de t % seront toujours inférieures à celles avec une TVA de t %. Ainsi, si on donne le choix à Pierre, il préférera toujours payer une TVA de t % sur les biens plutôt qu'un impôt sur le revenu de t %.

Exercice 7 : A l'aide de schémas, expliquer la forme « anormale » que la courbe d'offre de travail peut parfois prendre lorsque le taux de salaire augmente.

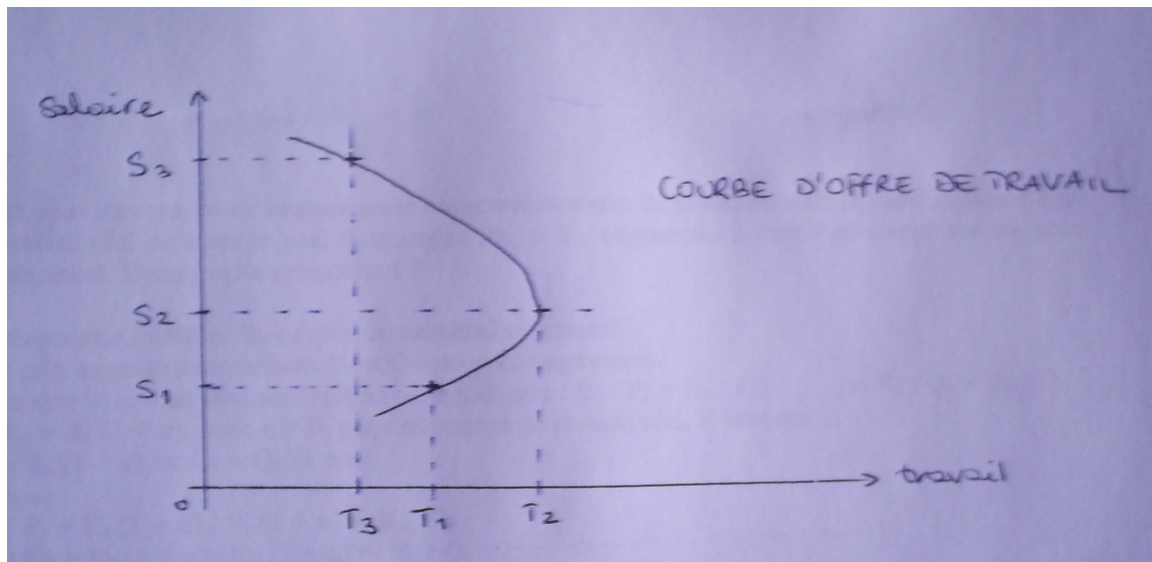
Mots clef : offre de travail, taux de salaire, courbe d'offre de travail.

Face à une hausse du taux de salaire, deux effets coexistent :

- un effet substitution en faveur du travail : car plus on travaille plus on gagne de l'argent ;
- un effet revenu en faveur du loisir : car plus le taux est élevé, plus le revenu pour un même nombre d'heures travaillées peut être jugé suffisant.

La courbe d'offre de travail est composée de deux parties :

- l'une où l'effet de substitution l'emporte sur l'effet de revenu ;
- l'autre où l'effet revenu l'emporte sur l'effet de substitution.



Dossier 1 : Quelques rappels sur le consommateur

Exercice 1 : Marc dispose mensuellement d'un revenu R_0 qu'il dépense pour acheter des biens X et Y (respectivement : en quantités x et y , et aux prix P_0 et Q_0).

Partie A : Évolution de la droite de budget

A partir de la situation initiale décrite ci-dessus, à quelle(s) condition(s) a-t-on :

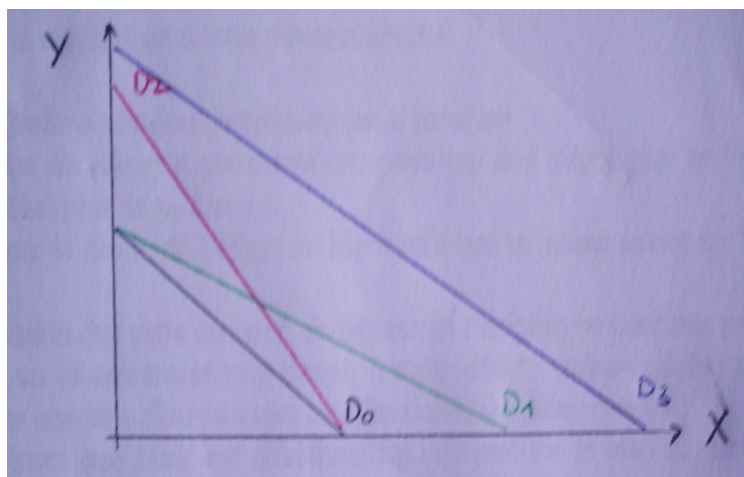
- uniquement un accroissement du revenu réel de Marc ?
- uniquement un accroissement du revenu nominal de Marc ?
- un accroissement du revenu nominal et un accroissement du revenu réel de Marc ?

Dans chaque cas, indiquer la position de la droite de budget finale par rapport à la droite initiale.

Mots clef de la partie A : droite de budget, revenu réel, revenu nominal.

a) Si nous devons avoir **uniquement** un accroissement du revenu réel, cela implique que le revenu nominal ne change pas. Autrement dit, il reste R_0 . Alors, pour que le revenu réel augmente, il faut :

- soit que P_0 baisse alors que Q_0 reste inchangé : courbe D_1 ;
- soit que Q_0 baisse alors que P_0 reste inchangé : courbe D_2 ;
- soit que P_0 baisse et que Q_0 baisse : courbe D_3 .



NB : D_0 est la droite de budget initiale.

b) Si nous devons avoir **uniquement** un accroissement du revenu nominal, cela implique que le revenu réel ne change pas. Autrement dit, si R_0 augmente, il faut également que les prix augmentent. Dans quelle proportion ?

R_0 augmente : notons R_1 ce revenu nominal augmenté.

Les prix augmentent : notons P_1 et Q_1 ces prix augmentés.

Pour que le revenu réel soit inchangé, il faut que : $R_1 / P_1 = R_0 / P_0$ et $R_1 / Q_1 = R_0 / Q_0$

Si $R_1 = R_0 (1 + \alpha)$, avec $\alpha > 0$, pour maintenir le revenu réel, il faut que :

$P_1 = P_0 (1 + \alpha)$, et $Q_1 = Q_0 (1 + \alpha)$.

Alors :

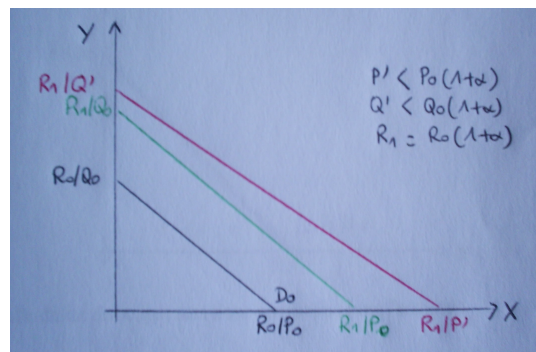
$$R_1 / P_1 = R_0 (1 + \alpha) / P_0 (1 + \alpha) = R_0 / P_0$$

$$R_1 / Q_1 = R_0 (1 + \alpha) / Q_0 (1 + \alpha) = R_0 / Q_0$$

Représentation graphique : la nouvelle droite de budget est confondue avec D_0 . En effet, les ordonnées à l'origine sont égales, tout comme les abscisses à l'origine.

c) Si nous devons avoir à la fois un accroissement du revenu réel et du revenu nominal, il suffit que $R_1 > R_0$ et que :

- (i) les prix restent inchangés. On a bien alors : $R_1 / P_0 > R_0 / P_0$ et $R_1 / Q_0 > R_0 / Q_0$;
- (ii) les prix augmentent, mais dans une proportion moindre que celle du revenu.



NB : l'un des mots les plus importants de l'énoncé est « uniquement ». Il encadre très sévèrement la manière dont vous devez répondre.

Partie B : Droite de budget, rationnement et taxation

A cause d'une décision du parlement européen qui doit s'appliquer en France, Marc ne peut pas consommer plus de x_m biens X.

a) Représenter la droite de budget de Marc reflétant le rationnement sur la consommation de bien X.

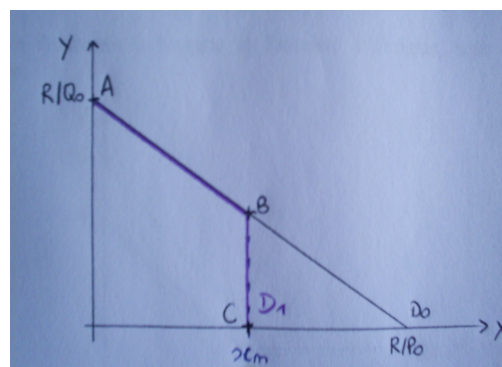
b) Est-il possible que cette décision du parlement européen ne concerne pas Marc ?

Pour éviter un rationnement trop brutal, il a été décidé, qu'au-delà de x_m , le consommateur devrait payer une taxe d'un montant t sur les unités supplémentaires.

c) En imaginant que Marc est effectivement rationné sur le bien X, représenter la droite de budget de Marc et calculer l'abscisse à l'origine de cette droite.

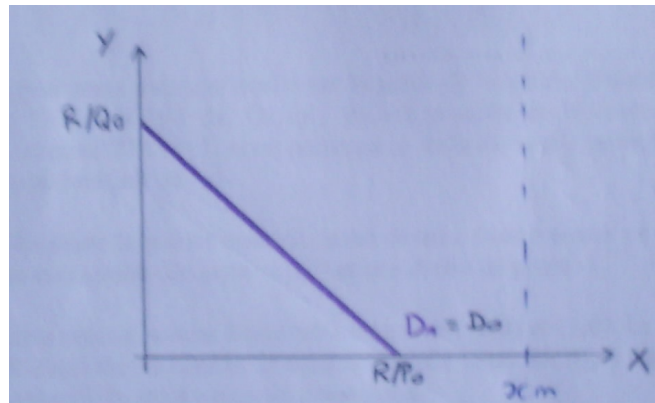
Mots clef de la partie B : rationnement, taxation, droite de budget.

a)



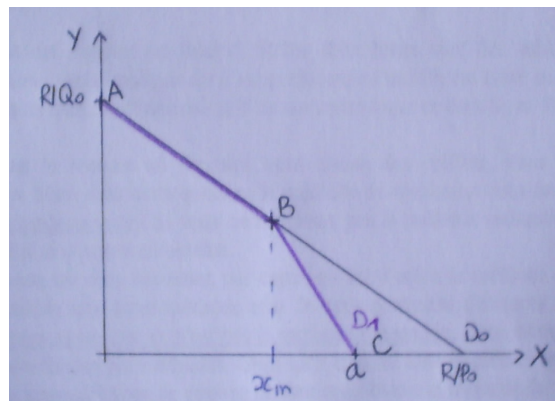
La forme de la nouvelle droite de budget nous indique que sur la portion [A,B] le revenu sera intégralement dépensé, mais que sur sa portion [B,C] il ne sera pas entièrement dépensé.

b)



La nouvelle droite de budget sera donc confondue avec l'ancienne.

c)



Lorsque $x \leq x_m$, le prix pour chaque unité de X est P_0 . Lorsque $x > x_m$, le prix pour chaque unité de X devient $(P_0 + t)$. Ainsi, la nouvelle droite de budget sera confondue à l'ancienne sur la portion [A,B], puis elle se situera « sous » l'ancienne droite de budget, et coupera l'axe des abscisses au point a.

La valeur de ce point a est composée de deux parties :

- la consommation de X avant application de la taxe ;
- la consommation de X après l'application de la taxe.

En faisant l'hypothèse que le consommateur souhaite uniquement acheter du bien X (afin de déterminer l'abscisse à l'origine) :

- avant l'application de la taxe, le consommateur peut obtenir x_m unités de X ;
- après l'application de la taxe, il lui reste une partie de son revenu : $R_0 - x_m \times P_0$. Ce revenu restant lui permet d'acheter : $(R_0 - x_m \times P_0) / (P_0 + t)$ unités de X.

Alors : $a = x_m + (R_0 - x_m \times P_0) / (P_0 + t)$

NB : nous vous conseillons de toujours faire une lecture rapide de l'ensemble d'un énoncé

avant de répondre aux questions afin d'éviter de « faire des choses en double ». En l'occurrence, sans une telle lecture, vous auriez pu traiter la question b déjà dans la question a.

Partie C : Courbes d'indifférence et maximisation de la satisfaction

La fonction d'utilité de Marc est la suivante : $U(x, y) = x + y$

De plus, $R_0 = 100$, $P_0 = 20$ et $Q_0 = 25$.

- Calculer le TMS et conclure sur la nature des biens X et Y.
- Dans l'hypothèse où il n'y a ni rationnement, ni taxation, déterminer graphiquement le panier optimal et la valeur de l'utilité associée.
- Sachant maintenant que $x_m = 2$ et $t = 5$, déterminer le nouveau panier optimal.
- Sous quelle(s) condition(s) la taxation n'a-t-elle pas d'influence sur la satisfaction de Marc ?

Mots clef de la partie C : courbe d'indifférence, fonction d'utilité, TMS, nature des biens, panier optimal, valeur de l'utilité, rationnement, taxation, maximisation de la satisfaction.

a) $TMS = U_{mx} / U_{my} = (\partial U(x,y) / \partial x) / (\partial U(x,y) / \partial y) = 1 / 1 = 1$

Les biens x et y sont des substituts parfaits*.

b) On nous répondre grâce à un graphique. Le panier optimal se situe au point de tangence entre la contrainte budgétaire et la courbe d'indifférence. Traçons tout d'abord la contrainte budgétaire ($R = px + qy$). Grâce à l'énoncé, nous pouvons dire qu'elle est : $100 = 20x + 25y$

Afin de la tracer, nous réécrivons :

$$100 = 20x + 25y$$

$$100 - 20x = 25y$$

$$100 / 25 - 20x / 25 = y$$

$$\text{Alors } y = 4 - 0,8x$$

$$\text{L'ordonnée à l'origine est : } y = 4 - 0,8x = 4 - 0,8 \times 0 = 4$$

$$\text{Puis : } 100 = 20x + 25y$$

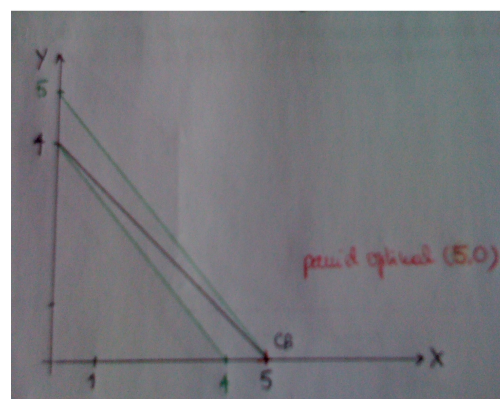
$$100 - 25y = 20x$$

$$100 / 20 - 25y / 20 = x$$

$$\text{Alors } x = 5 - 1,25y$$

$$\text{L'abscisse à l'origine est : } x = 5 - 1,25y = 5 - 1,25 \times 0 = 5$$

En reliant l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine, nous obtenons la contrainte budgétaire.



Le TMS peut nous indiquer quelle est la pente de la courbe d'indifférence au panier optimal. En effet, $TMS = - dy / dx$. Or dy / dx est la pente de la courbe d'indifférence. Dans cet exercice, comme $TMS = 1$, nous pouvons en déduire que la pente de la courbe d'indifférence au point optimum est de : -1.

Afin de localiser le panier optimal, nous devons donc trouver un point de tangence entre la contrainte budgétaire (de pente - 0,8) et une droite de pente -1.

Deux points correspondent à une telle exigence : (0,4) et (5,0). Le titre de la Partie C précise bien qu'il s'agit de maximiser la satisfaction. Or le panier (0,4) apporte moins de satisfaction que le panier (5,0), situé « plus au Nord-Est ».

Le panier optimal est donc : (5,0). Il apporte une utilité : $U(x,y) = x + y = 5 + 0 = 5$.

Ce résultat est logique est intuitif. Si les deux biens sont des substituts parfaits pour le consommateur, cela implique qu'il est parfaitement indifférent entre ces deux biens. Aussi, si l'un est moins cher, il est normal qu'il ne consomme que ce bien là, en l'occurrence le bien x.

NB1 : dans la mesure où l'énoncé vous donne des chiffres, vous pourriez appliquer le Lagrangien. Mais dans cette question la méthode de résolution vous est imposée : vous devez répondre graphiquement. Si vous ne respectez pas la méthode indiquée, vous n'êtes pas noté sur la totalité des points au barème.

NB2 : si vous ne vous souvenez pas comment faire selon la méthode imposée, vous pouvez toujours utiliser une autre méthode afin de vous permettre d'avancer. Si tel est le cas, dites nous que vous savez que ce n'est pas la méthode demandée, sinon nous pourrions en conclure que vous confondez les méthodes. Quoi qu'il en soit, dans la mesure où vous n'appliquez pas la méthode imposée, vous ne pouvez prétendre à obtenir la majorité des points du barème.

NB3 : attention, même si vous avez la formulation de la fonction d'utilité ici, cela ne vous aidera pas à tracer LA courbe d'indifférence dont vous avez besoin, à moins de procéder par tâtonnement. Contrairement à d'autres exercices, nous vous déconseillons ici de procéder ainsi car cela risque d'être très long... et vous risquez donc de perdre beaucoup de temps. La méthode la plus adaptée est d'utiliser l'information donnée par le TMS.

c) Lorsque $x_m = 2$ et $t = 5$, nous devons tracer une autre droite budgétaire. Elle sera la même que précédemment pour toute quantité de $x \leq 2$. Puis, nous devons déterminer sa pente. Comme le nouveau prix du bien x est : $20 + t = 20 + 5 = 25$, cela implique que le bien x a à présent le même prix que le bien y. Plus rien ne permet au consommateur de choisir l'un ou l'autre, tandis que dans la question b le prix induisait un choix en faveur du bien x. En toute rigueur, nous ne sommes donc pas en mesure de prédire le contenu du nouveau panier optimal, sauf qu'il contiendrait au minimum 2 unités de x.

Le calcul de la pente pour le second segment de la droite de budget confirme cette intuition. En effet, la pente est : $-(20 + 5) / 25 = -1$. Autrement dit, elle est parallèle à la droite de pente - 1 correspondant à la pente de la courbe d'indifférence au panier optimal. Il existe donc une multitude de paniers pouvant satisfaire :

- un point de tangence entre la nouvelle droite de budget et la droite indiquant la pente de la courbe d'indifférence au point optimal ;
- une utilité maximale.

Tous ces paniers comporteront au minimum 2 unités de x.

d) Pour que la taxation n'ait pas d'influence sur la satisfaction de Marc, il faut que le panier optimal associé permette d'atteindre une utilité de 5.

(i) Sans changer les paramètres, aucun panier ne permet d'atteindre une satisfaction de 5 car tous les paniers sont « situés à l'Ouest » du premier panier, autrement dit ils sont associés à des niveaux d'utilité plus faibles.

(iii) Si nous faisons évoluer à la fois la taxation et le revenu, il nous faut fixer R et t tels que : $5 = 2 + (R - 2 \times 20) / (20 + t)$

$$5 - 2 = (R - 2 \times 20) / (20 + t)$$

$$3(20 + t) = R - 40$$

$$60 + 3t + 40 = R$$

$$100 + 3t = R$$

Exercice 2 : Claire possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = 2xy + 3y$

où x et y sont respectivement les quantités consommées des biens X et Y.

a) Indiquer l'allure générale des courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité de Claire.

b) A l'aide de deux méthodes, calculer le TMS. Le résultat de la question précédente est-il confirmé ?

c) Calculer les coordonnées des points qui maximisent la satisfaction de Claire.

d) Indiquer la valeur du multiplicateur de Lagrange, puis montrer que $dU = \lambda dR$.

e) Reprendre les questions c) et d) lorsque $R = 150$, $p = 12$ et $q = 21$.

Mots clef : fonction d'utilité, courbe d'indifférence, TMS, les points qui maximisent la satisfaction, multiplicateur de Lagrange.

a) L'équation correspondant aux courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité est, pour un niveau d'utilité U : $U = 2xy + 3y$

$$U = y(2x + 3)$$

$$y = U / (2x + 3)$$

En termes d'allure générale, cela correspond à un bout d'hyperbole. *A priori*, nous sommes donc face à une fonction convexe.

b)

Méthode 1 : rapport des utilités marginales

$$\begin{aligned} \text{TMS} &= U_{mx} / U_{my} = (\partial U(x,y) / \partial x) / (\partial U(x,y) / \partial y) \\ &= 2y / (2x + 3) \end{aligned}$$

Méthode 2 : « moins la pente »

$$\begin{aligned} \text{TMS} &= - dy/dx = - [U / (2x + 3)]' = - [-2U / (2x + 3)^2] = 2U / (2x + 3)^2 \\ &= 2(2xy + 3y) / (2x + 3)^2 \\ &= 2(y(2x + 3)) / (2x + 3)^2 \\ &= 2y(2x + 3) / (2x + 3)^2 \\ &= 2y / (2x + 3) \end{aligned}$$

Pour savoir si cette fonction d'utilité est convexe, nous pouvons vérifier le signe de la dérivée totale du TMS par rapport à x. Il n'est cependant pas nécessaire de calculer cette dérivée, car il

est évident que le TMS est décroissant dans x : plus x est grand, plus le TMS sera petit, car x est au dénominateur et il n'y a pas d'ambiguïté quant à l'évolution du signe. Nous pouvons en conclure que la fonction d'utilité est bien convexe.

NB : il aurait été difficile de trancher en calculant $dTMS / dx$, car le signe aurait été ambigu. Lorsque vous pouvez conclure en amont comme ici où l'évolution du TMS est claire, privilégiez cette solution plutôt que de vous lancer dans des calculs compliqués et au résultat incertain.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \text{Max } U(x, y) \\ & \{x, y\} \\ & \text{s.c. } R = px + qy \end{aligned}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(x, y, \lambda) = 2xy + 3y + \lambda(R - px - qy)$$

Les conditions de premier ordre (CPO)* :

$$\begin{array}{lll} (1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0 & & (1) 2y - \lambda p = 0 \\ (2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 & \text{s'écrivent} & (2) 2x + 3 - \lambda q = 0 \\ (3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0 & & (3) R - px - qy = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & & (1) 2y = \lambda p & \\ & \text{s'écrivent} & (2) 2x + 3 = \lambda q & \text{puis} \\ & & (3) R - px - qy = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) 2y / p = \lambda \\ (2) (2x + 3) / q = \lambda \\ (3) R - px - qy = 0 \end{array}$$

En égalisant (1) = (2), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \\ 2y / p &= (2x + 3) / q \\ 2y &= [p(2x + 3)] / q \\ y &= [p(2x + 3)] / 2q \quad (4) \end{aligned}$$

En insérant (4) dans (3), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} R - px - qy &= 0 \\ R - px - q[p(2x + 3)] / 2q &= 0 \\ R - px - [p(2x + 3)] / 2 &= 0 \\ R - px - (2px + 3p) / 2 &= 0 \\ R - px - (2px / 2) - (3p / 2) &= 0 \\ R - px - px - (3p / 2) &= 0 \\ R - 2px - (3p / 2) &= 0 \\ R - (3p / 2) &= 2px \\ [R - (3p / 2)] / 2p &= x^* \\ x^* &= R / 2p - 3p / 4p = (2R - 3p) / 4p = x^* \end{aligned}$$

En remplaçant x par x^* dans (4), nous pouvons en déduire y^* :

$$\begin{aligned} y^* &= [p(2x^* + 3)] / 2q \\ &= (2x^*p + 3p) / 2q \\ &= (2p[(2R - 3p) / 4p] + 3p) / 2q \\ &= (4pR - 6p^2 + 12p^2) / (4p \times 2q) \\ &= (4pR + 6p^2) / 8pq \end{aligned}$$

$$= (2R + 3p) / 4q$$

Les coordonnées des points qui maximisent la satisfaction de Claire sont donc :

$$(x^*, y^*) = ((2R - 3p) / 4p, (2R + 3p) / 4q)$$

d) Valeur du multiplicateur de Lagrange :

D'après l'expression (1) *supra*, nous pouvons indiquer la valeur du multiplicateur de Lagrange. Comme $\lambda = 2y / p$, nous pouvons réécrire qu'à l'optimum :

$$\begin{aligned}\lambda^* &= 2y^* / p = 2 [(2R + 3p) / 4q] / p \\ &= (4R + 6p) / 4qp \\ &= (2R + 3p) / 2qp\end{aligned}$$

NB : d'après l'expression (2) *supra*, nous pouvons trouver cette même valeur du multiplicateur de Lagrange. Comme $\lambda = (2x + 3) / q$, nous pouvons réécrire qu'à l'optimum :

$$\begin{aligned}\lambda^* &= (2x^* + 3) / q = (2[(2R - 3p) / 4p] + 3) / q \\ &= [(4R - 6p) / 4p + 3] / q \\ &= (4R - 6p + 12p) / 4pq \\ &= (4R + 6p) / 4pq \\ &= (2R + 3p) / 2qp\end{aligned}$$

Monter que $dU = \lambda dR$:

$$dR = (\partial R / \partial x)dx + (\partial R / \partial y)dy = pdx + qdy \quad \text{car } R = px + qy$$

$$\begin{aligned}dU &= (\partial U / \partial x)dx + (\partial U / \partial y)dy = U_{mx} dx + U_{my} dy \\ &= 2y dx + (2x + 3) dy\end{aligned}$$

or dans les CPO nous avons :

$$(1) 2y = \lambda p$$

$$(2) 2x + 3 = \lambda q$$

Nous pouvons donc poursuivre en écrivant :

$$dU = 2y dx + (2x + 3) dy = \lambda p dx + \lambda q dy = \lambda (pdx + qdy) = \lambda dR$$

e) Reprendre les questions c) et d) lorsque $R = 150$, $p = 12$ et $q = 21$.

$$\text{Max } U(x, y)$$

$$\{x, y\}$$

$$\text{s.c. } 150 = 12x + 21y$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(x, y, \lambda) = 2xy + 3y + \lambda (150 - 12x - 21y)$$

Les conditions de premier ordre (CPO)* :

$$(1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0$$

$$(1) 2y - \lambda 12 = 0$$

$$(2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 \quad \text{s'écrivent}$$

$$(2) 2x + 3 - \lambda 21 = 0$$

$$(3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0$$

$$(3) 150 - 12x - 21y = 0$$

$$(4)$$

	(1) $2y = \lambda 12$		(1) $2y / 12 = \lambda$
s'écrivent	(2) $2x + 3 = \lambda 21$	puis	(2) $(2x + 3) / 21 = \lambda$
	(3) $150 - 12x - 21y = 0$		(3) $150 - 12x - 21y = 0$

En égalisant (1) = (2), nous pouvons écrire :

$$\lambda = \lambda$$

$$2y / 12 = (2x + 3) / 21$$

$$2y = [12 (2x + 3)] / 21$$

$$y = [12 (2x + 3)] / 42 \quad (4)$$

En insérant (4) dans (3), nous pouvons écrire :

$$150 - 12x - 21y = 0$$

$$150 - 12x - 21 [[12 (2x + 3)] / 42] = 0$$

$$150 - 12x - [12 (2x + 3)] / 2 = 0$$

$$150 - 12x - (24x + 36) / 2 = 0$$

$$150 - 12x - (24x / 2) - (36 / 2) = 0$$

$$150 - 12x - 12x - 18 = 0$$

$$150 - 24x - 18 = 0$$

$$150 - 18 = 24x$$

$$132 / 24 = x^*$$

$$x^* = 5,5$$

En remplaçant x par x* dans (4), nous pouvons en déduire y* :

$$y^* = [12 (2x^* + 3)] / 42$$

$$= [12 (2 \times (5,5) + 3)] / 42$$

$$= 12 (11 + 3) / 42$$

$$= 12 \times 14 / 42$$

$$= 168 / 42$$

$$= 4$$

Les coordonnées des points qui maximisent la satisfaction de Claire sont donc :

$$(x^*, y^*) = (5,5 ; 4)$$

d) Valeur du multiplicateur de Lagrange :

D'après l'expression (1) *supra*, nous pouvons indiquer la valeur du multiplicateur de Lagrange. Comme $\lambda = 2y / 12$, nous pouvons réécrire qu'à l'optimum :

$$\lambda^* = 2y^* / 12 = 2 \times 4 / 12$$

$$= 8 / 12$$

$$= 2 / 3$$

NB : d'après l'expression (2) *supra*, nous pouvons trouver cette même valeur du multiplicateur de Lagrange. Comme $\lambda = (2x + 3) / 21$, nous pouvons réécrire qu'à l'optimum :

$$\lambda^* = (2x^* + 3) / 21 = (2 \times 5,5 + 3) / 21$$

$$= (11 + 3) / 21$$

$$= 14 / 21$$

$$= 2 / 3$$

Exercice 3 : Reprenons la fonction d'utilité de Claire (cf. Exercice 2 immédiatement *supra*) :

$$U(x, y) = 2xy + 3y$$

- Déterminer, à l'aide de deux méthodes, l'équation de la courbe de consommation revenu.
- En déduire l'équation du chemin d'expansion du revenu lorsque $R = 150$, $p = 12$ et $q = 21$.
- Sur les bases de la question précédente, déterminer la valeur du revenu qui conduirait Claire à ne plus consommer de bien X.
- Déterminer la courbe d'Engel pour chaque bien.
- Calculer les élasticités revenu et indiquer la nature des biens.
- Établir l'équation des courbes de demande des biens X et Y.

Mots clef : fonction d'utilité, courbe de consommation revenu, chemin d'expansion du revenu, courbe d'Engel, élasticité revenu, nature des biens, courbe de demande.

a) Méthode 1 :

D'après la définition de la courbe de consommation revenu, nous pouvons en déduire que nous en avons calculé l'équation dans l'exercice 2 *supra*. Cette équation est :

$$y = (2x + 3)p / 2q$$

Méthode 2 :

étape 1 : $U = 2xy + 3y = y(2x + 3)$ que l'on peut réécrire : $y = U / (2x + 3)$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \partial y / \partial x &= -2U / (2x + 3)^2 = -2(y(2x + 3)) / (2x + 3)^2 \\ &= -2y(2x + 3) / (2x + 3)^2 \\ &= -2y / (2x + 3) \end{aligned}$$

étape 2 : $R = px + qy$ que l'on peut réécrire : $qy = R - px$ puis : $y = R / q - px / q$

$$\text{Alors : } \partial y / \partial x = -p / q$$

étape 3 : nous pouvons écrire : $-2y / (2x + 3) = -p / q$

Puis en réarrangeant les termes : $2y / (2x + 3) = p / q$

$$2y = (p / q) \times (2x + 3)$$

$$y = (p / 2q) \times (2x + 3) = (2x + 3)p / 2q$$

b) Étant donné les valeurs données aux paramètres, le chemin d'expansion du revenu est donc : $y = (2x + 3)p / 2q = (2x + 3) \times 12 / 2 \times 21 = (2x + 3) \times 6 / 21 = 12x / 21 + 18 / 21$
 $y = 12x / 21 + 6 / 7$

c) Sur la base de la question précédente, nous pouvons déterminer la valeur du revenu qui conduirait Claire à ne plus consommer de bien X, c'est-à-dire qui impliquerait : $x^* = 0$. Nous avons : $R = px + qy = 12 \times 0 + 21y$

Pour calculer y, nous utilisons l'équation du chemin d'expansion (question b). Lorsque $x^* = 0$, nous avons : $y^* = 12x^* / 21 + 6 / 7 = (12 / 21) \times 0 + 6 / 7 = 0 + 6 / 7 = 6 / 7$

$$\text{Alors : } R = 12 \times 0 + 21 \times 6 / 7 = 0 + 3 \times 6 = 18$$

d) D'après les quantités optimales (x^*, y^*) calculées dans l'exercice 2 et la définition de ce qu'est une courbe d'Engel, nous pouvons écrire que les équations pour les courbes d'Engel des biens x et y sont :

$$\begin{aligned} Q_x(R) &= (2R - 3p) / 4p = (2R - 3 \times 12) / (4 \times 12) = (2R - 36) / 48 = 2R / 48 - 36 / 48 \\ &= R / 24 - 3 / 4 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_y(R) &= (2R + 3p) / 4q = (2R + 3 \times 12) / (4 \times 21) = (2R + 36) / 84 = 2R / 84 + 36 / 84 \\ &= R / 42 + 3 / 7 \quad (2) \end{aligned}$$

e) Formule générale pour calculer l'élasticité revenu :

$$e_{q/R} = [\partial Q(R) / \partial R] / [Q(R) / R] = [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)]$$

Valeur de cette élasticité pour le bien x :

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = (1 / 24) \times [R / (R / 24 - 3 / 4)] && \text{utilisation de (1)} \\ &= R / [24 (4R - 3 \times 24) / (24 \times 4)] \\ &= R / [(4R - 72) / 4] \\ &= 4R / (4R - 72) \\ &= 600 / 528 \approx 1,14 \quad \text{car } R = 150 \end{aligned}$$

Si nous devons calculer cette élasticité sans en préciser la valeur :

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = [2 / 4p] \times R / [(2R - 3p) / 4p] && \text{utilisation de } Q_x(R) = (2R - 3p) / 4p \\ &= 2R / (2R - 3p) \end{aligned}$$

Valeur de cette élasticité pour le bien y :

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = (1 / 42) \times R / [R / 42 + 3 / 7] && \text{utilisation de (2)} \\ &= R / [42 (7R + 3 \times 42) / (42 \times 7)] \\ &= R / [(7R + 126) / 7] \\ &= 7R / (7R + 126) \\ &= 1050 / 1176 \approx 0,89 \quad \text{car } R = 150 \end{aligned}$$

Si nous devons calculer cette élasticité sans en préciser la valeur :

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = (2 / 4q) \times R / [(2R + 3p) / 4q] && \text{utilisation de } Q_y(R) = (2R + 3p) / 4q \\ &= 2R / (2R + 3p) \end{aligned}$$

Pour indiquer la nature des biens, nous devons positionner ces élasticités par rapport à 0 et 1, valeurs frontières au niveau des définitions. Sur la base de la valeur des élasticités, nous pouvons directement conclure que x est un bien de luxe (car $1,14 > 1$) et que y est un bien normal (car $0 < 0,89 < 1$).

Sur la base des élasticités où R, p et q ne sont pas remplacés par leur valeur, nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= 2R / (2R - 3p) > 1 \quad \text{car } 1 = 2R / 2R < 2R / (2R - 3p) \\ &\text{ou encore : } 2R / (2R - 3p) = (2R - 3p + 3p) / (2R - 3p) \\ &= (2R - 3p) / (2R - 3p) + [3p / (2R - 3p)] \\ &= 1 + [3p / (2R - 3p)] > 1 \end{aligned}$$

x est donc un bien de luxe.

$$\begin{aligned} e_{q/R} &= 2R / (2R + 3p) < 1 \quad \text{car } 1 = 2R / 2R < 2R / (2R + 3p) \\ &\text{ou encore : } 2R / (2R + 3p) = (2R - 3p + 3p) / (2R + 3p) \\ &= (2R - 3p) / (2R + 3p) - [3p / (2R + 3p)] \\ &= 1 - [3p / (2R + 3p)] < 1 \end{aligned}$$

par ailleurs, $2R / (2R + 3p) > 0$

y est donc un bien normal.

f) D'après la définition d'une courbe de demande, nous pouvons nous baser sur les quantités optimales (x^*, y^*) préalablement calculées. Alors :

$$D_x(p) = (2R - 3p) / 4p = (2 \times 150 - 3p) / 4p = (300 - 3p) / 4p = 75 / p - 3 / 4$$

$$D_y(q) = (2R + 3p) / 4q = (2 \times 150 + 3 \times 12) / 4q = (300 + 36) / 4q = 336 / 4q = 84 / q$$

NB : les demandes ne dépendent que du propre prix du bien concerné.

Exercice 4 : La fonction d'utilité de Sophie est la suivante : $U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

- Calculer les fonctions de demande. La forme des courbes de demande est-elle « normale »?
- Déterminer le sentier d'expansion du revenu et montre qu'il s'agit d'une droite qui passe par l'origine. Que peut-on dire des préférences de Sophie lorsque son revenu varie ?
- En déduire l'allure générale des courbes d'Engel pour les biens X et Y, puis les déterminer.
- En déduire la valeur des élasticités revenu des biens X et Y.
- Indiquer la nature des biens X et Y.

Mots clef : fonction d'utilité, fonction de demande, courbe de demande, sentier d'expansion du revenu, préférences, courbe d'Engel, élasticité revenu, nature des biens.

a) Pour calculer les fonctions de demande, nous appliquons le lagrangien.

Max $U(x, y)$

$\{x, y\}$

s.c. $R = px + qy$

$$L(x, y, \lambda) = x^\alpha y^{1-\alpha} + \lambda [R - px - qy]$$

Les conditions de premier ordre :

$$\begin{array}{lll} (1) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0 & (1) \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} - \lambda p = 0 & (1) \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} = \lambda p \\ (2) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 & (2) (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} - \lambda q = 0 & (2) (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} = \lambda q \\ (3) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0 & (3) R - px - qy = 0 & (3) R - px - qy = 0 \end{array} \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{array}{ll} (1) [\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}] / p = \lambda & \\ \text{i.e. } (2) [(1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha}] / q = \lambda & \\ (3) R - px - qy = 0 & \end{array}$$

En égalisant (1) et (2), nous obtenons l'équation de la courbe consommation revenu :

$$[\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}] / p = [(1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha}] / q$$

$$q [\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}] = p (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha}$$

$$y^{1-\alpha} / y^{-\alpha} = [p (1-\alpha) x^\alpha] / [q \alpha x^{\alpha-1}]$$

$$(4) \quad y = [p (1-\alpha) x] / [q \alpha]$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$$R - px - qy = 0$$

$$R - px - q [p (1-\alpha) x] / [q \alpha] = 0$$

$$R - px - [p (1-\alpha) x] / \alpha = 0$$

$$R = px [1 + (1-\alpha) / \alpha]$$

$$R / [1 / \alpha] = px$$

$$\alpha R / p = x^*$$

Puis en remplaçant x par x^* dans (4) :

$$y^* = [p (1-\alpha) x^*] / [q \alpha] = [p (1-\alpha) [\alpha R / p]] / [q \alpha] = (1-\alpha) R / q$$

Alors :

$$D_x(p) = \alpha R / p$$

$$D_y(q) = (1-\alpha)R / q$$

Pour statuer sur la forme de ces courbes de demande, nous devons d'abord savoir ce que nous recherchons. Que signifie une « forme normale » ? *A priori*, la demande doit décroître lorsque le prix augmente. Nous calculons donc les dérivées de ces demandes en fonction du prix afin de savoir si cette caractéristique d'une fonction de demande est respectée.

$$\partial D_x(p) / \partial p = -\alpha R / p^2 < 0 \quad \text{car } 0 < \alpha < 1$$

$$\partial D_y(q) / \partial q = -(1-\alpha)R / q^2 < 0 \quad \text{car } 0 < \alpha < 1$$

Ces deux fonctions de demande sont donc décroissantes dans les prix. Elles ont donc une forme « normale ».

NB : les deux lagrangiens suivant sont rigoureusement identiques !

$$L(x, y, \lambda) = x\alpha y^{1-\alpha} + \lambda [R - px - qy] = x\alpha y^{1-\alpha} - \lambda [px + qy - R]$$

b) D'après la définition de ce qu'est un sentier d'expansion du revenu, nous pouvons affirmer que nous l'avons déjà calculé précédemment (expression (4)) et donc dire qu'il est :

$$y = [p(1-\alpha)x] / [q\alpha]$$

Lorsque $x^* = 0$, nous avons bien : $y^* = [p(1-\alpha) \times 0] / [q\alpha] = 0$

Ce sentier d'expansion du revenu passe donc bien par l'origine.

Lorsque son revenu varie, les préférences de Claire restent stables. Elles sont définies selon un rapport de proportionnalité. On parle de préférences homothétiques*.

c) D'après la définition de ce qu'est une courbe d'Engel et les résultats précédents, nous pouvons statuer sur l'allure générale de ces courbes ici. Comme les préférences sont homothétiques, un doublement du revenu impliquera un doublement des quantités consommées de chaque bien. Plus généralement, quelle que soit la variation du revenu, les quantités consommées varieront dans les mêmes proportions. Par ailleurs, cela implique également que les courbes d'Engel passent par l'origine.

Puis, nous pouvons écrire directement :

$$Q_x(R) = \alpha R / p$$

$$Q_y(R) = (1-\alpha)R / q$$

NB : faites attention à l'ordre de la question. On vous demande tout d'abord de vous prononcer sur l'allure générale des courbes, puis de les déterminer.

d) Formule générale pour calculer l'élasticité revenu :

$$e_{q/R} = [\partial Q(R) / \partial R] / [Q(R) / R] = [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)]$$

Pour le bien x : $e_{q/R} = [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = [\alpha / p] \times R / [\alpha R / p] = 1$

Pour le bien y : $e_{q/R} = [\partial Q(R) / \partial R] \times [R / Q(R)] = [(1-\alpha) / q] \times R / [(1-\alpha)R / q] = 1$

e) Comme les élasticité revenu des biens x et y sont égales à 1, nous pouvons en déduire qu'il s'agit de biens normaux.

Exercice 5 : La fonction d'utilité d'un consommateur est la suivante : $U(x, y) = x^2y + 4$. Les prix des biens X et Y, p et q, valent respectivement 2 et 4. le revenu du consommateur est de $R = 24$. Mettre en évidence, sur les plans graphique et algébrique, tous les effets d'un

doublément du prix du bien X, à l'aide de la méthode de :

- a) Hicks.
- b) Slutsky.

Mots clef : fonction d'utilité, méthode de Hicks, méthode de Slutsky.

Max $U(x,y)$

$\{x,y\}$

s.c. $24 = px + 4y$

$L(x,y,\lambda) = x^2y + 4 + \lambda [24 - px - 4y]$

conditions de premier ordre :

(1) $\partial L(x,y,\lambda) / \partial x = 0$	(1) $2xy - p\lambda = 0$	(1) $2xy = p\lambda$
(2) $\partial L(x,y,\lambda) / \partial y = 0$	i.e. (2) $x^2 - 4\lambda = 0$	i.e. (2) $x^2 = 4\lambda$
(3) $\partial L(x,y,\lambda) / \partial \lambda = 0$	(3) $24 - px - 4y = 0$	(3) $24 - px - 4y = 0$

i.e.

(1) $2xy / p = \lambda$
(2) $x^2 / 4 = \lambda$
(3) $24 - px - 4y = 0$

En égalisant (1) et (2), nous obtenons :

$$2xy / p = x^2 / 4$$

$$y = px^2 / 8x$$

$$y = px / 8 \quad (4)$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$$24 - px - 4y = 0$$

$$24 - px - 4(px / 8) = 0$$

$$24 - px (1 + 1/2) = 0$$

$$24 = px (3/2)$$

$$24 \times 2 / 3p = x^* = 16 / p$$

Alors :

$$y^* = px^* / 8 = p(16 / p) / 8 = 2$$

Lorsque $p = 2$:

Le **panier optimal initial A** est donc (8,2). Il procure une utilité de :

$$U(8,2) = 8^2 \times 2 + 4 = 132$$

Pour tracer la courbe d'utilité associée à ce niveau d'utilité, nous déduisons son équation :

$$132 = x^2y + 4$$

$$132 - 4 = x^2y$$

$$128 / x^2 = y$$

Puis nous déterminons deux autres points nous permettant de tracer la courbe :

si $x = 12$, alors $y = 128 / 12^2 \approx 0,88$ (**point a1**)

si $x = 5$, alors $y = 128 / 5^2 \approx 5,12$ (**point a2**)

Pour tracer la contrainte budgétaire associée à la situation initiale, nous pouvons écrire :

$$24 = 2x + 4y$$

$$24 - 2x = 4y$$

$$y = (24 - 2x) / 4 = 6 - (1/2)x$$

$$24 - 4y = 2x$$

$$y = (24 - 4y) / 2 = 12 - 2y$$

Alors, si $x = 0$, $y = 6$ et si $y = 0$, $x = 12$. En reliant ces deux points, la contrainte budgétaire initiale est tracée (CB1).

Lorsque le prix du bien X double, $p = 4$:

$$x^* = 16 / p = 16 / 4 = 4$$

$$y^* = 2 \text{ quels que soient les prix.}$$

Le **nouveau panier optimal B** est donc (4,2). Il procure une utilité de :

$$U(4,2) = 4^2 \times 2 + 4 = 36$$

Pour tracer la courbe d'utilité associée à ce niveau d'utilité, nous déduisons son équation :

$$36 = x^2y + 4$$

$$36 - 4 = x^2y$$

$$28 / x^2 = y$$

Puis nous déterminons deux autres points nous permettant de tracer la courbe :

$$\text{si } x = 8, \text{ alors } y = 28 / 8^2 \approx 0,44 \text{ (point b1)}$$

$$\text{si } x = 2, \text{ alors } y = 28 / 2^2 = 7 \text{ (point b2)}$$

Pour tracer la contrainte budgétaire associée à la nouvelle situation, nous pouvons écrire :

$$24 = 4x + 4y$$

$$24 - 4x = 4y$$

$$y = (24 - 4x) / 4 = 6 - x$$

$$24 - 4y = 4x$$

$$y = (24 - 4y) / 4 = 6 - y$$

Alors, si $x = 0$, $y = 6$ et si $y = 0$, $x = 6$. En reliant ces deux points, la nouvelle contrainte budgétaire est tracée (CB2).

a) Méthode de Hicks

Il faut tracer et calculer quel est le panier intermédiaire permettant de séparer l'effet substitution et l'effet de revenu selon la méthode de Hicks. Le panier intermédiaire se situe sur la courbe d'indifférence initiale au point de tangence avec une contrainte budgétaire parallèle avec la nouvelle contrainte budgétaire. Pour calculer ce point, il faut donc que la dérivée de la courbe d'indifférence initiale soit égale à la pente de la nouvelle contrainte budgétaire :

$$d(128 / x^2) / dx = -1$$

$$-(2x \times 128) / (x^2)^2 = -1$$

$$256x / x^4 = 1$$

$$256 / x^3 = 1$$

$$x^* = \sqrt[3]{256} = 256^{(1/3)} \approx 6,35$$

$$y^* = 128 / (x^*)^2 = 128 / (256^{(1/3)})^2 = 128 / (256^{(2/3)}) \approx 3,17$$

Le panier intermédiaire **i** est donc (6,35 ; 3,17). Pour tracer la contrainte budgétaire intermédiaire, nous connaissons sa pente (-1) ainsi qu'un panier (le panier optimal **i**) par

lequel elle passe. Nous pouvons poser l'équation de cette contrainte :

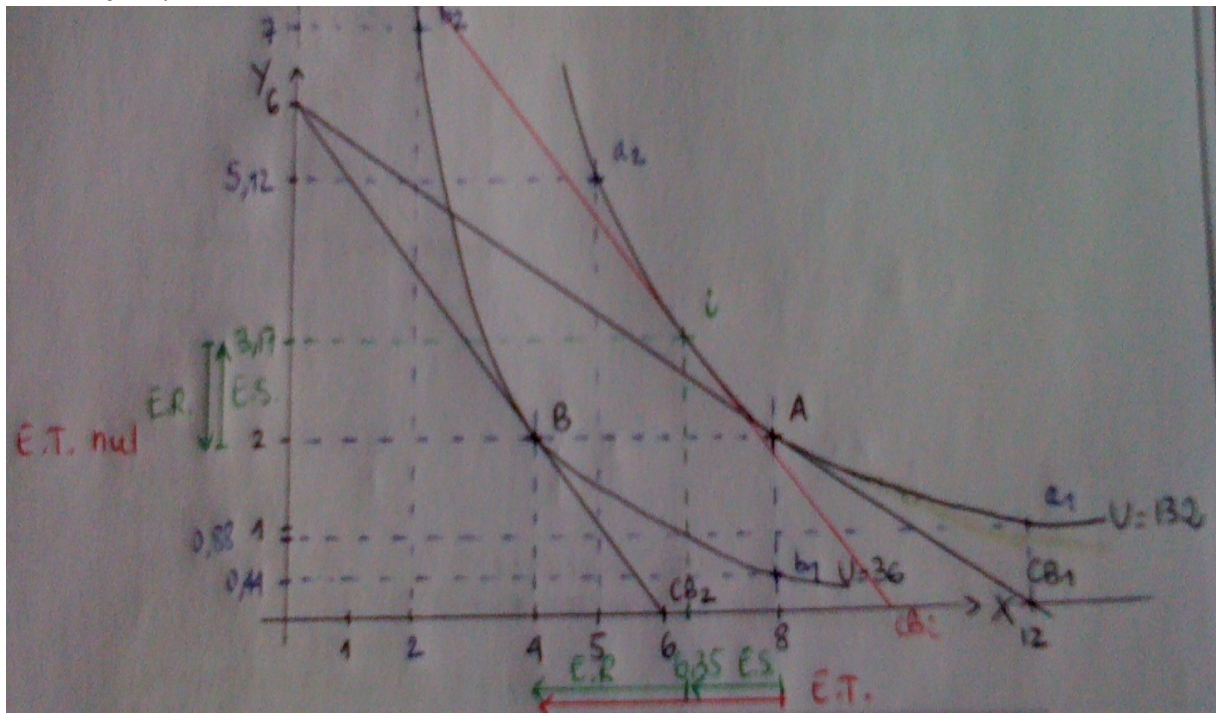
$$y = -x + b$$

alors : $b = y + x = 256^{(1/3)} + 128 / (256^{(2/3)}) \approx 9,52$ (point i1).

En reliant le point i1 et le point i nous obtenons la contrainte budgétaire intermédiaire (CBI).

Graphiquement, les effets substitution (E.S.), revenu (E.R.) et total (E.T.) sont représentés par des flèches. Nous pouvons également les calculer :

- effet substitution : (i) pour le bien X, cet effet est $E.S.x = -1,65$ car les quantités passent de 8 en A à 6,35 en i ; (ii) pour le bien Y, cet effet est $E.S.y = 1,17$ car les quantités passent de 2 en A à 3,17 en i ;
- effet revenu : (i) pour le bien X, cet effet est $E.R.x = -2,35$ car les quantités passent de 6,35 en i à 4 en B ; (ii) pour le bien Y, cet effet est $E.R.y = -1,17$ car les quantités passent de 3,17 en i à 2 en B ;
- effet total : (i) pour le bien X, cet effet est $E.T.x = -4$ car les quantités passent de 8 en A à 4 en B ; (ii) pour le bien Y, cet effet est $E.T.y = 0$ car les quantités sont de 2 en A et en B.



NB : la méthode de Slutsky n'est pas au programme de révision, ni pour le contrôle, ni pour l'examen.

Méthode de Slutsky :

Les éléments de la situation initiale et de la nouvelle situation sont déjà en place. Puis la droite de budget intermédiaire est construite selon la méthode de Slutsky. Il s'agit de faire pivoter la droite de budget initiale CB1 au point A jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à la nouvelle contrainte budgétaire CB2.

L'équation de cette droite de budget intermédiaire selon la méthode de Slutsky est de pente -1 et passe par le panier optimal initial A :

$$y = -x + b$$

$$2 = -8 + b$$

$$\text{Alors : } b = 2 + 8 = 10$$

La droite de budget selon l'équation de Slutsky a donc pour équation : $y = -x + 10$

Cette contrainte budgétaire peut aussi s'écrire : $10 = y + x$

Pour trouver le panier intermédiaire selon cette méthode, il faut repasser par le lagrangien face à cette nouvelle contrainte budgétaire :

$$\text{Max } U(x, y)$$

$$\{x, y\}$$

$$\text{s.c. } 10 = x + y$$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y + 4 + \lambda [10 - x - y]$$

conditions de premier ordre :

$$(4) \partial L(x, y, \lambda) / \partial x = 0$$

$$(1) 2xy - p\lambda = 0$$

$$(1) 2xy = p\lambda$$

$$(5) \partial L(x, y, \lambda) / \partial y = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$(2) x^2 - 4\lambda = 0$$

i.e.

$$(2) x^2 = 4\lambda$$

$$(6) \partial L(x, y, \lambda) / \partial \lambda = 0$$

$$(3) 10 - x - y = 0$$

$$(3) 10 - x - y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad & (1) 2xy / p = \lambda \\ & (2) x^2 / 4 = \lambda \\ & (3) 10 - x - y = 0 \end{aligned}$$

En égalisant (1) et (2), nous obtenons :

$$2xy / p = x^2 / 4$$

$$y = px^2 / 8x$$

$$y = px / 8 \quad (4)$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$$10 - x - y = 0$$

$$10 - x - (px / 8) = 0$$

$$10 - x (1 + (p / 8)) = 0$$

$$10 = x (1 + (p / 8)) = x (1 + (4 / 8)) = 1,5x \quad \text{car nous sommes face au nouveau prix : } p = 4$$

$$x^* = 10 / 1,5 = 20 / 3 \approx 6,67$$

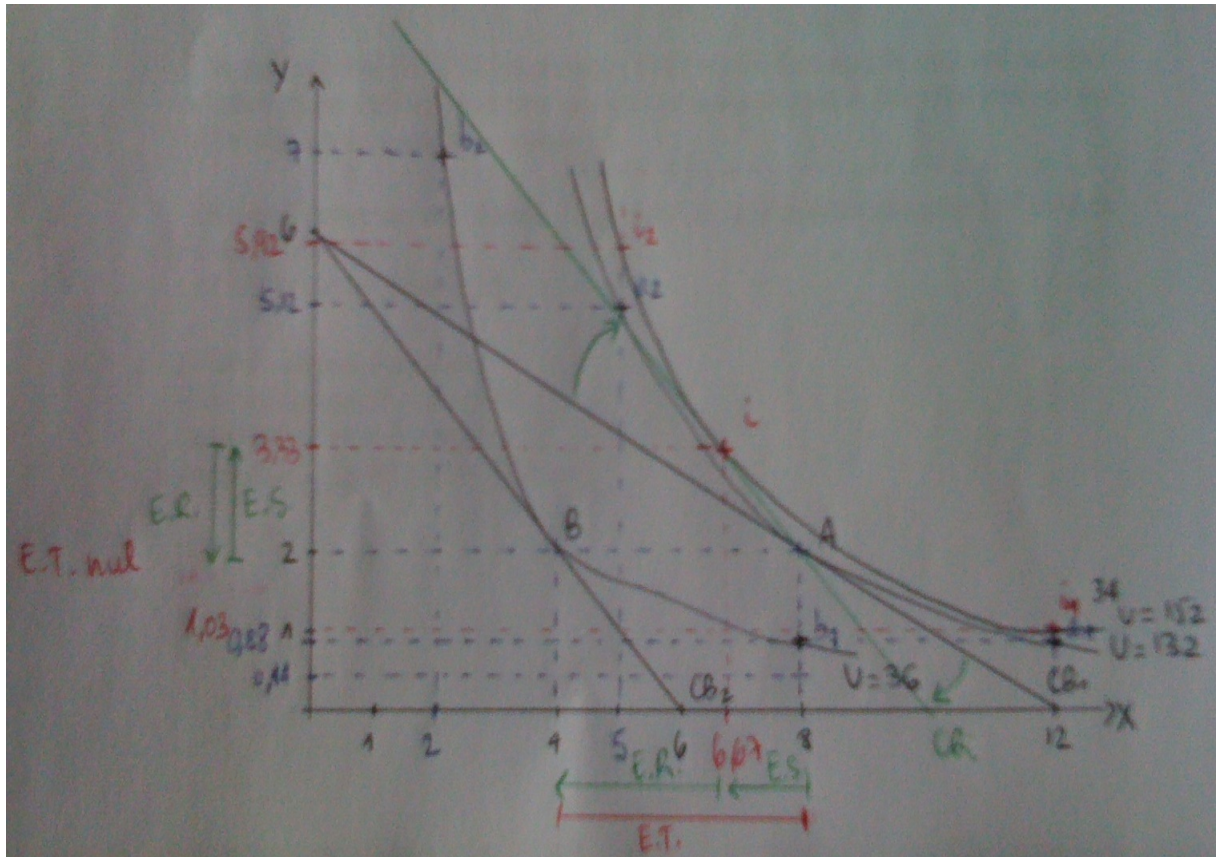
$$\text{Et : } y^* = px^* / 8 = 4 \times (10 / 1,5) / 8 = 10 / 3 \approx 3,33$$

$$\text{Et l'utilité associée est alors : } U(20 / 3 ; 10 / 3) = 152$$

$$\text{La courbe d'indifférence intermédiaire est donc : } y = 148 / x^2$$

L'effet total selon cette méthode est strictement le même que pour la méthode de Hicks. En revanche :

- effet substitution : (i) pour le bien X, cet effet est $E.S.x = - 1,33$ car les quantités passent de 8 en **A** à $(20 / 3)$; (ii) pour le bien Y, cet effet est $E.S.y = 1,33$ car les quantités passent de 2 en **A** à $(10 / 3)$;
- effet revenu : (i) pour le bien X, cet effet est $E.R.x = - 2,67$ car les quantités passent de $(20 / 3)$ à 4 en **B** ; (ii) pour le bien Y, cet effet est $E.R.y = - 1,33$ car les quantités passent de $(10 / 3)$ à 2 en **B**.



Exercice 6 : On suppose que l'horizon économique d'un consommateur comporte deux périodes, notées t_1 et t_2 . Sa fonction d'utilité intertemporelle est la suivante :

$$U(C_1, C_2) = 90(\sqrt{C_1}) + 3C_2$$

On désigne par :

- C_i : le montant de la consommation à la période t_i ;
- R_i : le revenu du consommateur à la période t_i ;
- P_i : le prix des biens consommés à la période t_i ;
- α : le taux d'intérêt annuel.

- a) Calculer le taux marginal de substitution intertemporel (noté TMSI) ; en déduire la forme des courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité.
- b) Déterminer les consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur, notées : C_1^* et C_2^* .
- c) Comment se comportent les consommations optimales lorsque le taux d'intérêt fluctue ?
- d) Calculer le taux d'intérêt permettant au consommateur d'être, ni prêteur, ni emprunteur, dans le cas où : $R_1 = 19\,600$, $R_2 = 28\,000$, $P_1 = 100$ et $P_2 = 112$.
- e) représenter graphiquement tous les résultats précédents.
- f) Interpréter le TMSI en fonction des éléments dont vous disposez.
- g) L'absence d'inflation modifie-t-elle la satisfaction du consommateur ? En cas d'inflation nulle, le doublement du taux d'intérêt le conduit-il à revoir son plan de consommation ?

Mots clef : fonction d'utilité intertemporelle, taux d'intérêt, TMSI, courbe d'indifférence, consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur, prêteur, emprunteur, inflation, plan de consommation.

a) Le TMSI se calcule sur le même principe que le TMS :

$$\begin{aligned} \text{TMSI} &= U_{mC_1} / U_{mC_2} = (\partial U(C_1, C_2) / \partial C_1) / (\partial U(C_1, C_2) / \partial C_2) \\ &= [90 / 2\sqrt{C_1}] / 3 \\ &= [45 / \sqrt{C_1}] / 3 \\ &= 15 / \sqrt{C_1} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors immédiatement déduire la forme des courbes d'indifférence associées à cette fonction d'utilité : elles sont convexes car le TMSI est décroissant dans C_1 .

b) $\text{Max } U(C_1, C_2)$
 $\{C_1, C_2\}$
s.c. $R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} = P_1 C_1 + P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1}$

$$L(x, y, \lambda) = 90 (\sqrt{C_1}) + 3C_2 + \lambda [R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 C_1 - P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1}]$$

conditions de premier ordre :

$$\begin{aligned} (7) \quad \partial L(C_1, C_2, \lambda) / \partial C_1 &= 0 & (1) \quad 45 / \sqrt{C_1} - \lambda P_1 &= 0 \\ (8) \quad \partial L(C_1, C_2, \lambda) / \partial C_2 &= 0 & \text{i.e.} \quad (2) \quad 3 - \lambda (1 + \alpha)^{-1} P_2 &= 0 \\ (9) \quad \partial L(C_1, C_2, \lambda) / \partial \lambda &= 0 & (3) \quad R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 C_1 - P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad (1) \quad 45 / P_1 \sqrt{C_1} &= \lambda \\ (2) \quad 3 / (1 + \alpha)^{-1} P_2 &= \lambda \\ (3) \quad R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 C_1 - P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

En égalisant (1) et (2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 45 / P_1 \sqrt{C_1} &= 3 / (1 + \alpha)^{-1} P_2 \\ 45 (1 + \alpha)^{-1} P_2 &= 3 P_1 \sqrt{C_1} \\ [45 (1 + \alpha)^{-1} P_2] / 3 P_1 &= \sqrt{C_1} \\ [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)] &= \sqrt{C_1} \\ C_1^* &= [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2 \quad (4) \end{aligned}$$

En insérant (4) dans (3) :

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 C_1^* - P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1} &= 0 \\ R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2 - P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1} &= 0 \\ R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2 &= P_2 C_2 (1 + \alpha)^{-1} \\ C_2^* &= [R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2] / P_2 (1 + \alpha)^{-1} \\ C_2^* &= [R_1 + R_2 (1 + \alpha)^{-1}] / P_2 (1 + \alpha)^{-1} - P_1 [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2 / P_2 (1 + \alpha)^{-1} \\ C_2^* &= (1 + \alpha)^{-1} [R_1 (1 + \alpha) + R_2] / P_2 (1 + \alpha)^{-1} - [P_1 15^2 P_2^2] / [P_1^2 (1 + \alpha)^2] / P_2 (1 + \alpha)^{-1} \\ C_2^* &= [R_1 (1 + \alpha) + R_2] / P_2 - [15^2 P_2] / P_1 (1 + \alpha) \\ C_2^* &= [R_1 (1 + \alpha) + R_2] / P_2 - [225 P_2] / P_1 (1 + \alpha) \end{aligned}$$

Les consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur, notées C_1^* et C_2^* , sont :
 $[15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2$; $[R_1 (1 + \alpha) + R_2] / P_2 - [225 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]$

c) Pour savoir comment se comportent les consommations optimales lorsque le taux d'intérêt fluctue, nous les dérivons par rapport au taux d'intérêt :

$$\partial C_1^* / \partial \alpha = \partial [15 P_2 / P_1 (1 + \alpha)]^2 / \partial \alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \partial [15^2 P_2^2 / P_1^2 (1+\alpha)^2] / \partial \alpha \\
&= \partial [225 P_2^2 (1+\alpha)^{-2} / P_1^2] / \partial \alpha \\
&= [225 P_2^2 / P_1^2] \times (-2) \times (1+\alpha)^{-2-1} \times 1 \\
&= -450 (P_2 / P_1)^2 (1+\alpha)^{-3} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial C_2^* / \partial \alpha &= \partial [(R_1 (1+\alpha) + R_2) / P_2 - (225 P_2 / P_1 (1+\alpha))] / \partial \alpha \\
&= \partial [(R_1 + R_1 \alpha + R_2) / P_2 - (225 P_2 (1+\alpha)^{-1} / P_1)] / \partial \alpha \\
&= R_1 / P_2 - (-1) 225 P_2 (1+\alpha)^{-1-1} / P_1 \times 1 \\
&= R_1 / P_2 + 225 P_2 (1+\alpha)^{-2} / P_1 \\
&= R_1 / P_2 + 225 P_2 / P_1 (1+\alpha)^2 > 0
\end{aligned}$$

Lorsque le taux d'intérêt augmente, la consommation optimale de C_1 diminue tandis que celle de C_2 augmente.

d) Si le consommateur n'est ni prêteur ni emprunteur, cela implique qu'il consomme tout son revenu en première période puis en deuxième période, ni plus ni moins. Alors : $P_1 C_1 = R_1$ et $P_2 C_2 = R_2$.

Avec les valeurs : $R_1 = 19\,600$, $R_2 = 28\,000$, $P_1 = 100$ et $P_2 = 112$

Nous avons en première période : $C_1 = R_1 / P_1 = 19\,600 / 100 = 196$

Et en deuxième période : $C_2 = R_2 / P_2 = 28\,000 / 112 = 250$

Etant donné la quantité optimale C_1^* , pour que le consommateur ne soit ni prêteur ni emprunteur, il faut qu'il consomme 196 unités de C_1 et donc que le taux d'intérêt soit :

$$[15 P_2 / P_1 (1+\alpha)]^2 = 196$$

$$[15 P_2 / P_1 (1+\alpha)] = \sqrt{196} = 14$$

$$15 P_2 = 14 P_1 (1+\alpha)$$

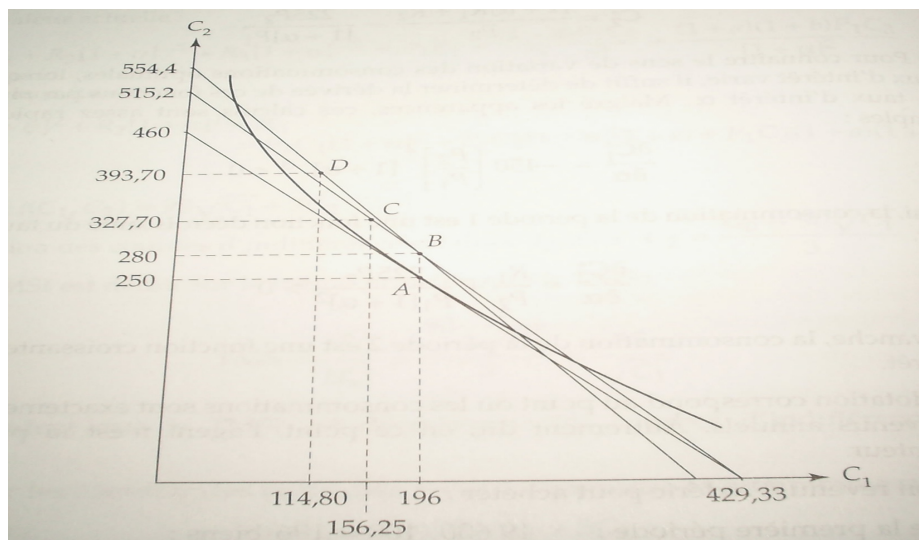
$$15 P_2 / 14 P_1 = (1+\alpha)$$

$$15 P_2 / 14 P_1 - 1 = \alpha$$

$$15 \times 112 / 14 \times 100 - 1 = \alpha = 1680 / 1400 - 1 = (1680 - 1400) / 1400 = 280 / 1400 = 0,20$$

Le consommateur n'est ni prêteur ni emprunteur lorsque le taux d'intérêt est de 20 %.

e)



Calculs complémentaires pour réaliser le tracé :

Lorsque le consommateur n'est ni prêteur ni emprunteur :

Nous calculons également le niveau d'utilité du panier (196,250) : $U(196,250) = 2010$

La courbe d'indifférence associée à ce niveau d'utilité est :

$$C_2 = (2010 - 90\sqrt{C_1}) / 3 = 670 - 30\sqrt{C_1}$$

La contrainte budgétaire associée au panier optimal (196,250) est :

$$100C_1 + 112C_2(1 + 0,20)^{-1} = 19\,600 + 28\,000(1 + 0,20)^{-1}$$

Elle peut se réécrire telle que : $C_2 = 460 - 15 / 14C_1$

f) Au panier optimal (196,250), nous avons : $TMSI = 1,07$. Cela signifie que, pour maintenir un même niveau d'utilité, consommer une unité en moins en période 1 doit être substitué par 1,07 unités de consommation en période 2.

Cela tient-il compte du taux d'intérêt ? Autrement dit, est-il possible d'acquérir 1,07 unité en période 2 ? Oui, car :

$$1,07 \times 112 / 100 = 1,1984 \approx 1,20$$

g) Cas 1 : absence d'inflation

Cela implique que : $P_1 = P_2 = 100$

La nouvelle dotation devient donc :

- en période 1 : $19\,600 / 100 = 196$ biens ;

- en période 2 : $28\,000 / 100 = 280$ biens.

La nouvelle droite de budget est : $C_2 = 512,2 - (6/5)C_1$

Le nouveau panier optimum est donc : (156,25 ; 327,70)

En l'absence d'inflation, le consommateur devient prêteur ($156,25 < 196$) en période 1. Il peut donc épargner, au taux de 20 %, et dispose donc d'un revenu plus élevé en période 2 :

$$28\,000 + (19\,600 - 15\,625)(1 + 0,20) = 32\,770$$

Ce nouveau revenu de période 2 lui permet bien d'acheter 327,70 biens :

$$32\,770 / 100 = 327,70$$

L'utilité de ce nouveau panier optimum est plus élevée que l'ancien panier : l'absence d'inflation a donc un effet positif sur le niveau de satisfaction du consommateur.

Cas 2 : inflation nulle et doublement du taux d'intérêt

Comme l'inflation est nulle, nous avons : $P_1 = P_2 = 100$

Cela permet d'accéder à 196 biens en période 1 et 280 en période 2 (cf. calculs Cas 1).

La nouvelle droite de budget est : $C_2 = 554,4 - (7/5)C_1$

Car elle tient compte du doublement du taux d'intérêt, qui passe de 20 % à 40 %.

Le nouveau panier optimum est donc : (114,8 ; 393,7)

Dans ce cas, le consommateur est prêteur ($114,8 < 196$) en période 1. Il peut donc épargner, au taux de 40 %, et dispose donc d'un revenu encore plus élevé en période 2 :

$$28\,000 + (19\,600 - 11\,480)(1 + 0,40) = 39\,368$$

Ce nouveau revenu de période 2 lui permet bien d'acheter environ 393,7 biens :
 $39\,368 / 100 = 393,68 \approx 393,7$

L'utilité de ce nouveau panier optimum est plus élevée que l'ancien panier : l'absence d'inflation combinée à une hausse du taux d'intérêt a donc un effet positif sur le niveau de satisfaction du consommateur.

Exercice 7 : Soit la fonction d'utilité d'un salarié : $U(L, C) = 2(\sqrt{L}) + C$, où L mesure la quantité d'heures de loisir, et C mesure la quantité de biens X consommés. Le bien C est un panier composé de biens divers. Ce salarié souhaite maximiser sa satisfaction sachant que :

- son temps disponible (hors activités vitales) est de 12 heures ;
- ce temps disponible se répartit en loisir (en quantité L) et en travail (en quantité T) ;
- sa rémunération horaire brute est fixée à s euros ;
- il perçoit un revenu fixe, non lié à son activité, de R euros ;
- tous ses revenus sont taxés au taux t (avec $0 < t < 1$) ;
- le prix unitaire du bien X est de 200 euros.

Mots clef : fonction d'utilité, maximisation de la satisfaction, rémunération horaire brute, revenu fixe non lié à l'activité, taxe.

Partie A :

- a) Déterminer la contrainte budgétaire de ce salarié.
- b) Calculer les valeurs C^* et L^* qui maximisent la satisfaction du salarié.
- c) On dispose des informations suivantes : $R = 100$, $s = 125$ et $t = 20\%$. Effectuer la représentation graphique et indiquer l'optimum (noté A).

Mots clef : contrainte budgétaire, maximisation de la satisfaction, optimum.

Partie B :

- d) Très apprécié dans son entreprise, ce salarié connaît une augmentation de sa rémunération brute de 40,80 %. Analyser les conséquences de cette hausse.
- e) Exprimer T en fonction de L^* et vérifier que cette relation fournit la courbe d'offre de travail pour différentes valeurs du paramètre t .
- f) Représenter l'offre de travail pour $t = 20\%$ et $t = 40\%$.
- g) Déterminer la relation existant entre le taux d'imposition et le montant des recettes fiscales pour différentes valeurs du paramètre s . A l'aide de votre calculatrice, sans chercher à étudier la fonction, représenter la courbe pour un salaire de 176 euros.

Mots clef : rémunération brute, courbe d'offre de travail, offre de travail, taux d'imposition, recette fiscale, salaire.

Partie C :

Reprise des hypothèses de la Partie A. Envisageons deux situations alternatives.

- h) Imaginons que ce salarié ne puisse pas choisir la durée de son travail, mais soit obligé de travailler six heures par jour. Quelles sont les conséquences de cette mesure ? Quel serait alors l'impact d'une hausse du salaire nominal ?
- i) Imaginons maintenant que toutes les heures de travail effectuées au-delà de huit heures soient payées en heures supplémentaires, c'est-à-dire double du taux normal. Déterminer la

nouvelle contrainte budgétaire et le nouvel optimum. Conclure.

Mots clef : salaire nominal, heure supplémentaire, contrainte budgétaire, optimum.

Définitions

bien de Giffen : « A partir de l'exemple de l'Irlande au XIX^e siècle, Giffen montre qu'en période de famine, alors que le prix des produits de première nécessité (bien inférieur) augmente beaucoup (comme la pomme de terre), les ménages les plus pauvres en consomment davantage et y consacrent une part plus importante de leur revenu. Les biens Giffen sont donc des biens dont la demande augmente avec le prix (élasticité-prix positive) contrairement au schéma classique selon lequel la demande d'un bien diminue lorsque le prix du bien augmente (élasticité-prix négative normale). » [site de la documentation française]. L'élasticité revenu est inférieure à 1.

bien de luxe : l'élasticité revenu est supérieure à 1.

bien normal : l'élasticité revenu est comprise entre zéro et 1.

bien inférieur : L'élasticité revenu est inférieure à 0.

biens substituables : « Deux biens sont dits substituables lorsque leur élasticité croisée est supérieure à zéro » [<http://www.univ-orleans.fr/iut-orleans/enseignants/gendron/lexique/termes.htm>]. Pour obtenir une quantité supplémentaire d'un bien, il faut nécessairement abandonner une certaine quantité d'un autre bien.

carte d'indifférence : c'est l'ensemble des courbes d'indifférence correspondant à une même fonction d'utilité.

chemin d'expansion du revenu : « à chaque fois qu'une droite de budget est tangente à une courbe d'indifférence, cela définit un nouvel équilibre. L'ensemble des équilibres ainsi défini constitue le chemin d'expansion du revenu, aussi appelé courbe de consommation revenu » [Médan (2008 : 21)].

concave : lorsque le TMS est croissant dans les x , la fonction d'utilité associée est concave. Une telle fonction d'utilité est alors impropre à réaliser une maximisation.

conditions de premier ordre : les conditions de premier ordre consiste, dans la méthode du lagrangien, à prendre les dérivées premières partielles par rapport à chacun des paramètres et à les égaliser à zéro. Pour trois paramètres, nous aurons alors trois conditions de premier ordre, où chaque dérivée doit être égale à zéro.

condition d'équilibre : appelée aussi condition d'arbitrage, elle signale lorsque le consommateur est indifférent entre les deux biens qu'il lui est possible de consommer. Conditionnellement au prix, chacun des biens lui apporte en effet une même utilité marginale. Il est possible de l'écrire de deux façons (*cf.* Exercice 2 de la première fiche).

consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur : il s'agit du panier optimal. Le revenu est intégralement dépensé. La condition d'équilibre est alors satisfaite et la pente de la courbe d'indifférence est la même au celle de la contrainte budgétaire.

contrainte budgétaire : généralement notée $R = p_x + q_y$, elle signale ici que le revenu est intégralement dépensé afin de se procurer des biens X et Y , tout en tenant compte de leur prix. Lorsque la contrainte budgétaire n'est pas saturée, elle s'écrit : $R \leq p_x + q_y$.

convexe : une fonction est dite convexe lorsque sa dérivée première est négative et que sa dérivée seconde est positive. Lorsque le TMS est décroissant dans les x , la fonction d'utilité associée est convexe. Une telle fonction d'utilité permet alors de réaliser une maximisation.

courbe de consommation revenu : « à chaque fois qu'une droite de budget est tangente à une courbe d'indifférence, cela définit un nouvel équilibre. L'ensemble des équilibres ainsi défini constitue le chemin d'expansion du revenu, aussi appelé courbe de consommation revenu » [Médan (2008 : 21)].

courbe de demande : quantités demandées d'un bien X lorsque son prix évolue. Elle est normalement décroissante dans les prix.

courbe d'Engel : quantités consommées d'un bien X lorsque le revenu du consommateur évolue. Elle est spécifique à chaque type de bien, selon sa nature (bien normal, de luxe, inférieur, *etc.*).

courbe d'indifférence : « Une courbe d'indifférence représente l'ensemble des combinaisons de deux biens qui procurent au consommateur un niveau d'utilité identique » [site de la documentation française]. Elles doivent être convexes (dérivée première négative et dérivée seconde positive) pour que la maximisation puisse être réalisée.

courbe d'offre de travail : fixation d'une quantité de travail que le travailleur est prêt à fournir selon le taux de salaire. Cette courbe a une forme particulière, car dans un premier temps c'est l'effet substitution qui l'emporte (alors un taux de salaire plus important incite le travailleur à offrir plus de travail), puis, dans un second temps, c'est l'effet revenu qui l'emporte (le travailleur dispose d'un revenu suffisant pour ne pas avoir à offrir plus de travail).

demandeur (emprunteur) : l'individu n'a pas assez de revenu pour financer le panier optimal qu'il vise. Il doit donc emprunter de l'argent.

droite de budget : c'est la contrainte budgétaire (*cf.* définition *supra*).

effet de revenu : « L'effet revenu a pour origine le fait que la hausse du prix de certains biens entraîne la baisse du pouvoir d'achat du revenu. En général, l'effet revenu a pour conséquence une baisse de la consommation de tous les biens en fonction de l'élasticité-revenu de chacun. L'effet sera plus ou moins important selon la part des biens dans la consommation dont le prix a augmenté » [site de la documentation française].

effet de substitution : « L'effet de substitution se traduit par la baisse de la demande de certains biens et par la hausse de la demande d'autres. Il est fonction de la plus ou moins grande substituabilité entre les biens » [site de la documentation française].

effet total / effet prix : « La modification des choix d'un agent économique à la suite de la variation du prix d'un bien est appelée effet prix. Celui-ci se décompose en un effet substitution et en un effet revenu » [site de la documentation française].

élasticité : « L'élasticité correspond à la sensibilité d'une variable x à une variable y. Elle se mesure par le rapport de la variation relative de x à celle de y. Par exemple, une élasticité des importations par rapport à la production de 2 signifie qu'à une augmentation de la production de 5% correspond un accroissement des importations de 10% » [site de la documentation française].

élasticité-prix directe : « Elle mesure le degré de sensibilité de la demande à une variation du prix du bien considéré. Généralement négative, elle signifie que la consommation diminue si le prix du bien augmente. La demande est dite inélastique lorsqu'elle ne change pas suite à une variation du prix (elle est proche de zéro) » [site de la documentation française]. Sa formule figure dans le corrigé *supra*.

élasticité revenu : « Elle mesure le degré de sensibilité de la demande d'un bien par rapport au revenu. Elle est égale au rapport entre le pourcentage de variation de la quantité demandée et le pourcentage de variation de revenu » [site de la documentation française]. Sa formule figure dans le corrigé *supra*.

fonction de demande : quantités demandées d'un bien X lorsque son prix évolue. Elle est normalement décroissante dans les prix.

fonction d'utilité : elle précise quelle est le niveau de satisfaction du consommateur étant donné les préférences du consommateur, leur articulation ainsi que la nature des biens.

fonction d'utilité intertemporelle : *cf.* fonction d'utilité, mais entre deux périodes du temps (aujourd'hui et demain par exemple dans les exercices).

heure supplémentaire : heure de travail réalisée au-delà de la durée légale du travail. Le taux de salaire est alors

majoré.

impact : effet net d'un changement de contexte.

impôt sur le revenu : part du revenu qui revient à l'État. Cela diminue le revenu disponible du consommateur.

inflation : « L'inflation désigne une hausse durable et générale des prix. Lorsque le prix d'un seul bien ou de quelques biens augmente, il n'y a pas nécessairement inflation car le prix des autres biens peut ne pas varier, voire diminuer. En période d'inflation, certains prix augmentent plus rapidement que d'autres ; le phénomène inflationniste s'accompagne donc d'une modification des prix relatifs. L'inflation peut se produire en période de stagnation de la production (stagflation) et se manifester sous des formes extrêmes (hyperinflation). L'origine de l'inflation reste un sujet de controverse entre les économistes » [site de la documentation française].

maximisation de la satisfaction : le consommateur cherche quelle situation optimale lui apporte le maximum de satisfaction étant donné sa fonction d'utilité et les contraintes auxquelles il fait face (prix, revenu).

méthode de Hicks : il s'agit de séparer effet de substitution et effet de revenu. Une contrainte budgétaire intermédiaire est construite en traçant une droite de budget parallèle à la nouvelle contrainte budgétaire et étant tangente à la courbe d'indifférence initiale. Le panier intermédiaire est alors utilisé pour séparer les deux effets.

méthode de Slutsky : il s'agit de séparer effet de substitution et effet de revenu. « [il s'agit de] faire pivoter la droite de budget initial autour du [panier optimal] initial jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à la droite de budget finale. Cette [...] droite de budget intermédiaire permettra de trouver un équilibre intermédiaire [...] au point de tangence d'une courbe d'indifférence [intermédiaire] » [Médan (2008 : 25)].

multiplicateur de Lagrange : coefficient par lequel est multiplié le niveau d'utilité lorsque le revenu varie. Il est noté λ .

nature des biens : il s'agit de qualifier les biens selon leur élasticité revenu (bien normal, de luxe, inférieur, *etc.*) et de la manière dont ils s'articulent aux autres (bien substituable, complémentaire, *etc.*).

offre de travail : quantité de travail offerte selon le niveau de salaire.

optimum : « L'optimum désigne la meilleure situation économique possible. Les agents ont un comportement d'optimisation qui consiste à maximiser un résultat (maximiser l'utilité pour les consommateurs, le profit pour les producteurs) à partir de ressources données ou à minimiser un coût pour obtenir un résultat donné » [site de la documentation française].

panier optimal : cf. consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur

points qui maximisent la satisfaction : cf. consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur

préférences homothétiques : préférences parfaitement stables quelle que soit l'évolution du revenu.

prêteur : après avoir consommé les quantités visées, le consommateur n'a pas dépensé l'intégralité de son revenu. Il peut prêter cet argent.

quantités optimales : cf. consommations qui maximisent la satisfaction du consommateur

rationnement : il y a rationnement lorsque les quantités d'un bien que le consommateur peut acquérir ne peuvent pas dépasser un certain seuil, et ce quel que soit son revenu. Exemple : pour un concert, le nombre de places est limité ; même si un consommateur peut acheter plus de places qu'il n'y en a dans la salle de concert, il ne pourra pas en obtenir plus.

recette fiscale : recette destinée à l'État et provenant des taxes et impôts.

recette totale : $RT = \text{prix} \times \text{quantités}$

revenu fixe non lié à l'activité : quel que soit le niveau d'activité de l'individu concerné, il disposera toujours de ce revenu R.

revenu nominal : « C'est le revenu exprimé en monnaie courante (ou aux prix courants) » [site de la documentation française].

revenu réel : « C'est le revenu exprimé à prix constants. Le revenu réel représente le pouvoir d'achat des ménages » [site de la documentation française].

salaire : « Somme d'argent remise au salarié qui représente le prix de sa force de travail et dont le montant est fixé en tenant compte de plusieurs facteurs (valeur des subsistances nécessaires aux travailleurs, nature du travail, qualification des travailleurs, forme que revêt la propriété des moyens de production, etc.) » [Trésor de la Langue Française Informatisé].

salaire nominal : salaire exprimé en valeur courante.

substitut parfait : deux biens sont des substituts parfaits lorsqu'ils sont, du point de vu du consommateur, interchangeables. Alors, le TMS = 1.

taux d'intérêt : « Coût du crédit pour l'emprunteur ou rémunération pour un placement. Il est exprimé en pourcentage et sur une période de référence en général d'un an » [site de la documentation française].

taux marginal de substitution (TMS) : « Le taux marginal de substitution entre deux biens Y et X mesure la variation de la quantité consommée du bien Y qui est nécessaire, le long d'une courbe d'indifférence, pour compenser une variation infinitésimale de la quantité consommée du bien X » [site de la documentation française].

taux marginal de substitution intertemporelle (TMSI) : cf. TMS, sauf entre deux périodes temporelles. Il s'agit de comparer aujourd'hui et demain.

taxe sur la valeur ajoutée (TVA) : c'est un impôt indirect sur la consommation.

utilité marginale : « L'utilité marginale d'un bien imparfaitement divisible est la variation de l'utilité totale induite par une unité supplémentaire de ce bien. L'utilité marginale d'un bien parfaitement divisible est la variation de l'utilité totale pour une variation infinitésimale de la quantité consommée » [site de la documentation française].

valeur de l'utilité : « L'utilité d'un bien quelconque mesure la satisfaction globale que l'individu retire de ce bien. Le niveau d'utilité totale dépend de la quantité du bien » [site de la documentation française].