UNIVERSITE D'AUVERGNE
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES
de CLERMONT-FERRAND

4 juin 2003

Ce sujet comporte deux feuilles
numérotées 1 et 2

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU MAGISTERE DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures

(en France de 14 h à 16 h)

Question 1 :

Une personne se réveille la nuit, en raison d'un violent mal de ventre, et prend, pour calmer la douleur un comprimé dans un tube de médicaments à portée de main. Au petit matin, son mal de ventre est encore plus violent et elle se rend compte qu'elle avait en fait à portée de main trois tubes dont deux contenant une substance calmante et le troisième une substance toxique. La personne se demande si elle n'a pas avalé la substance toxique. Le pharmacien, qu'elle a joint au téléphone, lui indique que la substance calmante qu'elle a voulu prendre provoque dans 10 pour cent des cas des symptômes semblables à ceux qu'elle ressent, et que la substance toxique provoque de tels symptômes dans 80% des cas. Les probabilités a priori sont :

P(symptômes/calmant) = 0.10 et P(symptômes/toxique) = 0.80

Si on suppose que le choix d'un tube contenant une substance a été fait de manière aléatoire avec d'égales probabilités pour chacun des trois tubes, calculez la probabilité d'avoir absorbé le calmant vu les symptômes observés et la probabilité d'avoir absorbé le toxique vu les symptômes observés.

Question 2 :

Trouvez la probabilité que, dans une famille de quatre enfants, il y ait au moins un garçon. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est de ½.

Sur 2000 familles de quatre enfants chacune, combien peut-on en trouver avec :

(a) au moins un garçon, (b) 2 garçons, (c) une ou deux filles et (d) aucune fille ?

Question 3 :

Pour la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Ecrivez l'équation caractéristique et trouvez les racines de l'équation.

(b) Trouvez les vecteurs propres correspondant à l'équation caractéristique.

(c) Diagonalisez la matrice.

Question 4

Indiquez si les fonctions suivantes disposent de maximum locaux, de minimum locaux ou de points d'inflexion.

(a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

(b) $y = 3x^3 - 3x - 2$

(c) $y = \dfrac{2x}{(x^2+1)}$

Question 5

Calculez les intégrales suivantes et utilisez l'information pour déterminer, le cas échéant, la constante d'intégration :

(a) $F(x) = \int \left(x^{1/2} + 5x^{2/3}\right) dx$

(b) $F(x) = \int \left(5x^3 + 2x + 6\right) dx$..............$F(0) = 5$

UNIVERSITE D'AUVERGNE
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES

5 JUIN 2002

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU MAGISTERE

DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve écrite de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures

(en France de 14 h à 16 h)

Ce sujet comporte 3 feuilles
numérotées de 1 à 3

Exercice I

Dans une entreprise comptant 1200 personnes, la répartition entre ouvriers (O), agents (A) et cadres (C), selon le sexe, homme (H) ou femme (F), est donnée, en partie, par le tableau ci-dessous :

Qualité / Sexe	O	A	C	Total
H	408			696
F		144		
Total	600			

1 - Sachant que l'ensemble des cadres représente 20 % du personnel, recopier et compléter ce tableau (justifier les calculs).

2 - On choisit une personne au hasard dans l'entreprise. Calculer, la probabilité que cette personne soit :

a) une femme ;
b) un agent homme
c) un cadre ou un homme.

3 - Indépendamment de la qualité ou du sexe de l'employé, l'entreprise évalue à 30 % la proportion de son personnel se rendant chaque jour au travail à bicyclette.

a) Si on interroge au hasard une personne de l'entreprise, calculer la probabilité de choisir une ouvrière venant à bicyclette.

b) Si on interroge au hasard une des personnes venant à bicyclette, quelle est la probabilité pour que ce soit un cadre?

c) Pendant 22 jours ouvrables, on choisit chaque jour, au hasard, une personne de l'entreprise. On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où le choix s'est fixé sur une ouvrière venant à bicyclette. Quelle est la loi de X ?

Exercice II

On note I_n l'indice des ventes d'une entreprise au cours de l'année 1997+n.

On connaît : $I_0 = 100$; $I_2 = 102,9$ et $I_4 = 146,4$. D'autre part, on sait que le niveau annuel des ventes de l'entreprise a connu une régression de 2% entre 1998 et 1999 et une augmentation de 12% entre 2000 et 2001.

1 - Calculer I_1 et en déduire le taux de croissance des ventes entre 1997 et 1998.

2 - Calculer I_3 et en déduire le taux de croissance des ventes entre 1999 et 2000.

Exercice III

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\ ;+\infty[$, dont la courbe représentative (C) est donnée par la figure 1 ci-dessous dans un repère orthogonal

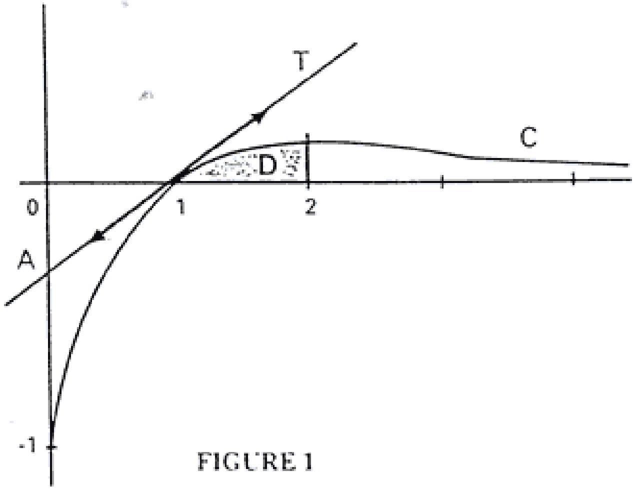

FIGURE 1

1 - Soit F une primitive de f sur $[0\ ;+\infty[$.

a) Indiquer, dans un tableau, le sens de variation de F sur $[0\ ;+\infty[$

b) Une des trois courbes ci-dessous, est la représentation graphique de F sur $[0\ ;+\infty[$; déterminer celle qui convient (justifier).

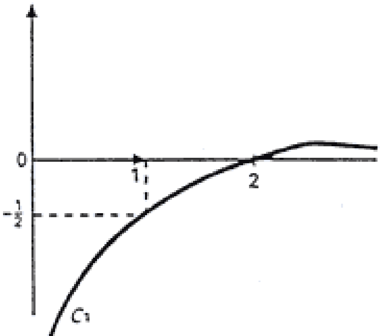

FIGURE 2

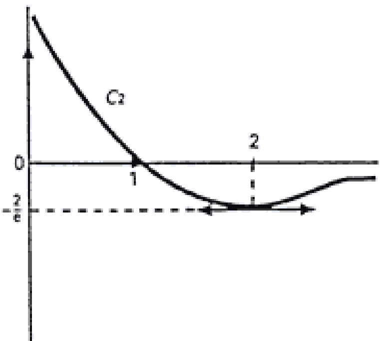

FIGURE 3

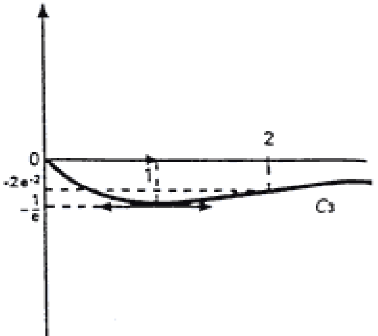

FIGURE 4

c). En utilisant les résultats précédents, calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine D teinté en gris sur la figure 1.

2 - La fonction f, dont la courbe représentative (C) est donnée à la figure 1, est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)e^{-x}$.

a) Calculer la valeur maximale de f(x).

b) Déterminer l'équation de la fonction F représentée graphiquement dans la question 1-b)

c) Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $x_0 = 1$, représentée à la figure 1. En déduire l'ordonnée exacte du point A, intersection de T avec l'axe vertical.

UNIVERSITE D'AUVERGNE
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES
de CLERMONT-FERRAND

6 juin 2001

Ce sujet comporte deux feuilles
numérotées 1 et 2

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU MAGISTERE DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures

(en France de 14 h à 16 h)

I

Soit f l'application linéaire de R^3 dans R^3 dont la matrice M dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$; a, b et c étant des réels donnés, tels que $a + b + c = s \neq 0$.

1- Montrer que les vecteurs

$$v_1 = e_1 - e_2 \quad ; \quad v_2 = e_2 - e_3 \quad ; \quad v_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$$

forment une base de R^3.

2- Déterminer la matrice de f dans cette base.

3- En déduire les valeurs propres de M.

4- Déterminer la matrice ligne L telle que :

$$M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} L$$

5- En déduire une expression simple de M^2, puis, $\forall n \in N$, de M^n en fonction de M, n et s.

II

Le revenu X d'une certaine catégorie de ménages est une variable aléatoire de densité :

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta}\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right) & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif.

1- Déterminer la fonction de répartition F de X

2- Calculer E(X)

3- Soit un échantillon de n ménages de la catégorie considérée ; les revenus respectifs de ces ménages sont donc des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots X_n$ qui suivent toutes la même loi que celle de X définie ci-dessus. Soit la variable Y = plus haut revenu trouvé dans l'échantillon, c'est-à-dire :

$$Y = \sup(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis sa densité g.

III

Une étude nationale sur les ménages a montré que le taux d'écoute d'une certaine émission télévisée était de 30% pour les femmes et de 50% pour les hommes. Elle a montré par ailleurs que si, dans un ménage, Madame suivait cette émission, la probabilité pour que Monsieur la suive en même temps passait à 60%.

1-On tire un ménage au hasard. Quelles sont les probabilités respectives pour que :

a- Les deux conjoints suivent l'émision

b- Au moins un des deux suive l'émission

c- Aucun des deux ne suive l'émission

d- Si l'homme la suit, la femme la suive aussi.

2- On étudie sur ces ménages les variables aléatoires F et H :

- F est la variable aléatoire modélisant l'écoute d'une femme : F=1 si la femme suit l'émission et F= 0 sinon
- H est la variable aléatoire modélisant l'écoute d'un homme : H=1 si l'homme suit l'émission et F= 0 sinon

a- Quelles sont les lois de F et H et leurs espérances respectives

b- Calculer la covariance de F et H. Ces deux variables aléatoires sont elles indépendantes ? Pourquoi ?

nb : on demande d'utiliser de préférence les notations de la question 2 pour la formalisation de la question 1

UNIVERSITE D'AUVERGNE
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES

6 JUIN 2000

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU MAGISTERE

DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve écrite de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures

(en France de 14 h à 16 h)

Ce sujet comporte 3 feuilles
numérotées de 1 à 3

-I-

Un promoteur projette la construction d'un nouvel ensemble résidentiel. La durée de réalisation de ce projet est la somme des durées A et C de ses deux étapes :

- durée A nécessaire à l'achat du terrain
- durée C nécessaire à la construction.

D'après son expérience, le promoteur sait que A et C sont des variables aléatoires dont il connaît les distributions de probabilités. Ces distributions sont les suivantes :

A (années)	p (A)
1	0,1
2	0,3
3	0,3
4	0,2
5	0,1

C (années)	p(C)
1	0,5
2	0,4
3	0,1

Le promoteur estime d'autre part que A et C sont statistiquement indépendantes (un délai supplémentaire dans l'achat du terrain ne changé en rien les offres sur les délais de construction).

Le promoteur bénéficierait d'un gros avantage fiscal s'il pouvait réaliser l'ensemble de son projet en 4 ans ou moins.

Quelle est la probabilité de cet événement ?

-II-

Soit f l'application linéaire de R^3 dans R^3, définie sur la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ par :

$$f(e_1) = -3e_1 - 2e_2 - e_3$$
$$f(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$$
$$f(e_3) = -e_1 - 2e_2 - 3e_3$$

1) Ecrire la matrice A de f dans la base B.

2) Soit le vecteur $\bar{V}$ de coordonnées (x, y, z) dans la base B. Quelles sont, dans cette même base, les coordonnées de $f(\bar{V})$?

3) La matrice A est elle inversible ? (justifier votre réponse). Que peut on en conclure pour le nombre de solutions du système $f(\vec{V}) = \vec{0}$?

4) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 3 \ ; \ A^n = (-2)^{n-2}\left[(n-1)A^2 + (2n-4)A\right]$$

-III-

La distribution des revenus d'une certaine population est caractérisée par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} = \dfrac{A}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_o \\ = 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

α et x_o étant des paramètres tels que :
$\alpha > 2$ et $x_o > 0$.

1) Exprimer A en fonction de α et x_o pour que f soit une densité de probabilité.

2) Quelle est, en fonction de α et x_o, la probabilité pour que le revenu d'un individu de la population considérée soit compris entre x_o et $5x_o$?

3) Quelle est, en fonction de α et x_o, l'espérance de revenu des individus de la population considérée ?

4) Parmi cette population, quel est le revenu moyen du sous-ensemble des individus dont le revenu est compris entre x_o et $5x_o$?

5) On montre que la variance de la distribution des revenus de l'ensemble de la population considérée est égale à :

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}(x_o)^2$$

Une valeur plus élevée de α correspond-elle à une distribution des revenus plus ou moins concentrée ? (on demande une réponse soigneusement justifiée)